

УДК 539.3

В.Н. ТИЩЕНКО, канд. физ.-мат. наук, Таврический нац. ун-т,
Ю.А. ШЕВЛЯКОВ, док. техн. наук, Таврический нац. ун-т

К ЗАДАЧЕ О ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ИЗЛУЧАТЕЛЕ

Исследованы переходные процессы в неограниченной упругой среде с цилиндрической прямолинейной полостью при ударном возбуждении собственных волн Био нормальной осесимметричной нагрузкой (т.н. «задача о цилиндрическом излучателе»), приложенной к поверхности полости. Дано сравнение с аналогичной проблемой в случае плоской границы (задача Лэмба) для оценки влияния кривизны опорной поверхности на изучаемые процессы. Показано, что волны Био имеют фронт, движущийся со скоростью волн Релея, амплитуда которого меняется вдоль направления движения (дисперсия) в отличие от фронта волны Релея в задаче Лэмба, амплитуда которого остается постоянной.

Одной из фундаментальных задач, решение которых влечет за собой понимание физической природы явлений в твердой среде, является задача о «цилиндрическом излучателе» [1], которая характеризует процесс распространения волн в среде на поверхности полости в виде бесконечного цилиндра кругового сечения радиуса a в упругой среде. Эта задача в отличие от плоской задачи Лэмба, которая является предельным аналогом последней при $a \rightarrow \infty$, учитывает конечное значение одной из главных кривизн поверхности, нагруженной или свободной от напряжений, что существенно влияет на процесс распространения собственных поверхностных волн в этой задаче, называемых «волнами Био» [2] (сравнить с волной Релея для плоской поверхности). Эти волны, как и волны Релея, несут в себе значительную энергию в силу их сильного затухания с глубиной, и являются в этом случае главными носителями информации для значительных расстояний и длительного времени на поверхности цилиндра.

Граничная задача ставится тривиально: на границе цилиндрической полости $r = a$ в упругой среде, отнесенной к цилиндрической системе координат (r, z, j) , задано нормальное напряжение $s_{rr} = s_0(z, t)$, $s_{rz} = s_{rj} = 0$. Требуется найти перемещения точек упругой среды и поверхности цилиндра с выделением в них собственных поверхностных волн, существующих и в отсутствие нагрузки от начальных условий, т.е. изучить процесс распространения волн на поверхностях конечной кривизны в отличие от плоской границы – задачи Лэмба.

Решение задачи также известно [3]: вводятся потенциалы Φ, Ψ как решения двух волновых уравнений для продольной и поперечной волны со скоростями c_1, c_2 соответственно в цилиндрической системе координат: $(g = (c_2/c_1)^2)$

$$\Phi = \operatorname{Re} \int_0^\infty \int_0^\infty A(k, w) K_0(ar) \cos kz \cos wt \, dk dw, \quad (1)$$

$$\Psi = \operatorname{Re} \int_0^\infty \int_0^\infty B(k, w) K_1(br) \sin kz \cos wt \, dk dw,$$

$$a = \sqrt{k^2 - gw^2/c_2^2},$$

$$b = \sqrt{k^2 - w^2/c_2^2}$$

где $K_0(x), K_1(x)$ – функции Макдональда, удовлетворяющие условиям излучения при $r \rightarrow \infty$. Из граничных условий следует система двух линейных уравнений для амплитуд $A(k, w), B(k, w)$ с решениями

$$A = \frac{\Delta_1}{\Delta} \bar{s}_0(k, w), \quad B = \frac{\Delta_2}{\Delta} \bar{s}_0(k, w),$$

$$\Delta_1 = (2k^2 - w^2/c_2^2) K_1(ba), \quad \Delta_2 = -2ka K_1(aa), \quad (2)$$

$$\Delta_0 = -\frac{2aw^2}{c_2^2 a} - 4abk^2 \frac{K_0(ba)}{K_1(ba)} + \left(2k^2 - \frac{w^2}{c_2^2}\right)^2 \frac{K_0(aa)}{K_1(aa)},$$

$$\Delta = \Delta_0 K_1(ba) K_1(aa),$$

$\bar{s}_0(k, w)$ – изображение двойного преобразования Фурье по t, z на грузки.

Из соответствующих зависимостей между перемещением \dot{u} и потенциалами Φ, Ψ :

$$\mathbf{\Gamma} \dot{u} = \operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot} \dot{\Psi}, \quad \dot{\Psi} = \{0, \Psi, 0\}$$

следуют выражения для смещений (u^c, u^s – \cos, \sin -преобразования Фурье по z):

$$u_r^c = \frac{a(2k^2 - w^2/c_2^2) K_1(ba) K_1(ar) - 2k^2 a K_1(aa) K_1(br)}{m \Delta_0 K_1(ba) K_1(aa)} \bar{s}_0(k, w),$$

$$u_z^s = \frac{k(2k^2 - w^2/c_2^2) K_1(ba) K_0(ar) - 2kab K_1(aa) K_0(br)}{m \Delta_0 K_1(ba) K_1(aa)} \bar{s}_0(k, w), \quad (3)$$

которые при $r = a$ заметно упрощаются:

$$u_r^c = \frac{aw^2}{m\Delta_0} \bar{S}_0(k, w),$$

$$u_z^s = -\frac{k}{m} \left[\frac{2k^2 - w^2/c_2^2}{\Delta_0} \frac{K_0(aa)}{K_1(aa)} - \frac{2abK_0(ba)}{\Delta_0 K_1(ba)} \right] \bar{S}_0(k, w), \quad (4)$$

При предельном переходе $ka \rightarrow \infty$, $wa/c_2 \rightarrow \infty$ эти выражения дают решение плоской задачи Лэмба [3]:

$$u_r^c = \frac{aw^2}{mN(k, w)} \bar{S}_0(k, w), \quad u_z^s = -k \frac{2k^2 - w^2/c_2^2 - 2ab}{mN(k, w)} \bar{S}_0, \quad (5)$$

где $N(k, w) = (2k^2 - w^2/c_2^2)^2 - 4k^2 ab$ – т.н. «определитель Релея», который при равенстве нулю определяет скорость волн Релея $c_R = c_R(g)$ [3].

Для анализа процесса распространения волн необходимо перейти в область оригиналов смещений, т. е. осуществить вычисление двойного преобразования Фурье по k, w и перейти в область реальных переменных z, t . Этот переход может быть осуществлен численно, если иметь надежный критерий точности вычислений. Таким критерием являются аналитические выражения смещений (5) в задаче Лэмба, которые могут быть получены на основе перехода в пространство переменных a, b :

$$k^2 = \frac{a^2 - gb^2}{1-g}, \quad \frac{w^2}{c_2^2} = \frac{a^2 - b^2}{1-g},$$

$$N(a, b) = \frac{1}{(1-g)^2} \{ [a^2 + (1-2g)b^2]^2 - 4(1-g)(a^2 - gb^2)ab \};$$

$$N(a, b) = \frac{1}{(1-g)^2} (a-b) [a^3 - a^2 b(3-4g) - ab^2 - b^3(1-2g)^2] =$$

$$= \frac{a-b}{(1-g)^2} \prod_{i=1}^3 (a - l_i b),$$

в котором l_i есть корни полинома

$$P_3(l) = l^3 - l^2(3-4g) - l - (1-2g)^2.$$

Можно показать, что при $0 \leq g \leq 0,5$ один корень этого полинома положительный $l_r > 1$, а два других либо отрицательны,

либо комплексно-сопряженные. Положительный корень соответствует скорости поверхностной волны Релея

$$c_R = c_2 \sqrt{\frac{I_R^2 - 1}{I_R^2 - g}} < c_2 \dots$$

Таким образом, решением задачи Лэмба будут выражения (m – модуль сдвига)

$$u_y^c = \frac{a(a+b)(1-g)\bar{S}_0}{m \prod_{i=1}^3 (a - l_i b)}, \quad u_z^s = -k \frac{a-b(1-2g)}{m \prod_{i=1}^3 (a - l_i b)} (1-g)\bar{S}_0.$$

Эти выражения могут быть проинтегрированы в замкнутой форме, а именно: вводя новую переменную $k = \frac{pW}{c_2}$, можно получить:

$$\begin{aligned} u_y &= \operatorname{Re} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sqrt{p^2 - g} (\sqrt{p^2 - g} + \sqrt{p^2 - 1}) (1-g)}{\prod_{i=1}^3 (\sqrt{p^2 - g} - l_i \sqrt{p^2 - 1})} \cos \frac{pWz}{c_2} \cos wtdp dw = \\ &= \frac{\operatorname{Re}}{2p} \int_0^\infty F(p) \left[d\left(\frac{pz}{c_2} + t\right) + d\left(\frac{pz}{c_2} - t\right) \right] dp = \\ &= \operatorname{Re} \frac{c_2}{2pz} \left[F\left(\frac{tc_2}{z}\right) + F\left(-\frac{tc_2}{z}\right) \right] = \operatorname{Re} \frac{c_2 \sqrt{c_2^2 t^2 - gz^2} z^2}{pN(c_2 t, z)} \end{aligned}$$

Аналогично для u_z :

$$\begin{aligned} u_z &= \operatorname{Re} \int_0^\infty \int_0^\infty p \frac{(\sqrt{p^2 - g} - (1-2g)\sqrt{p^2 - 1}) (1-g)}{\prod_{i=1}^3 (\sqrt{p^2 - g} - l_i \sqrt{p^2 - 1})} \sin \frac{pWz}{c_2} \cos wt dp dw = \\ &= -\frac{\operatorname{Im}}{2p} \int_0^\infty F(p) \left[d\left(\frac{pz}{c_2} - t\right) - d\left(\frac{pz}{c_2} + t\right) \right] dp - p \operatorname{res} F\left(\frac{c_2}{c_R}\right) d(c_R t - |z|) \operatorname{sign} z = \\ &= -\operatorname{Im} \left[c_2 t \frac{2c_2^2 t^2 - z^2 - 2\sqrt{c_2^2 t^2 - gz^2} \sqrt{c_2^2 t^2 - z^2}}{pN(c_2 t, z)} + p \operatorname{res} F\left(\frac{c_2}{c_R}\right) d(c_R t - |z|) \operatorname{sign} z \right] \end{aligned}$$

Имея эти выражения для предельной задачи, можно заключить, что перемещения состоят из суммы слагаемых (собственные волны) вида:

$$f_i = \frac{B_i}{\sqrt{c_2^2 t^2 - g z^2} - I_i \sqrt{c_2^2 t^2 - z^2}},$$

но лишь одно из них можно назвать «волной Релея», которая имеет фронт с разрывным значением перемещения при $I = I_R > 0$, т.е. нечто, которое отличает его от других слагаемых при $I_i < 0$, когда перемещения остаются непрерывными. Волна Релея имеет те же два фронта продольной ($z = c_1 t$) и поперечной ($z = c_2 t$) волн, однако наличие дополнительного характерного фронта ($z = c_R t$) придает ей особый смысл. Расчеты показывают, что при суммировании трех слагаемых собственных волн «волна Рэлея» остается доминирующей и одна представляет по значению весь волновой пакет, и лишь к началу волнового пакета при $z \rightarrow c_1 t$ погрешность замены суммы одним слагаемым несколько растет (рис. 1).

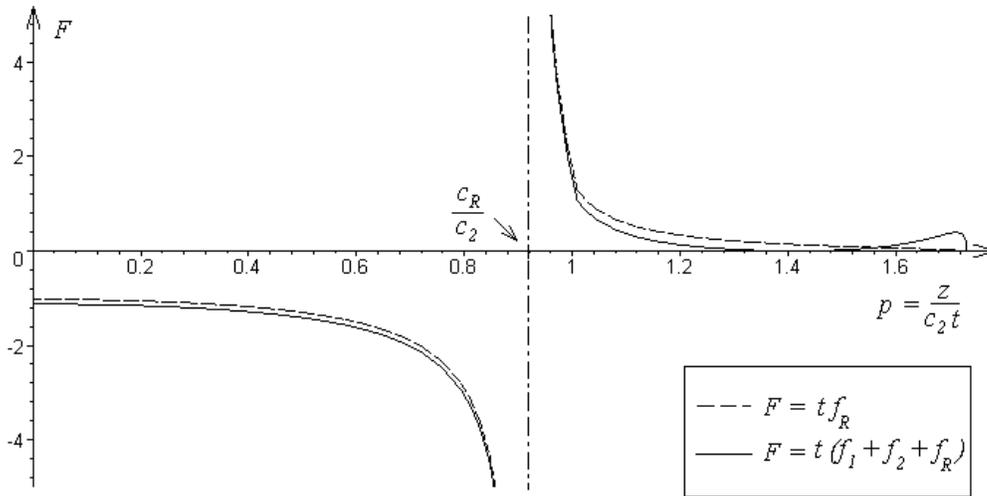


Рис. 1

Проведенный анализ позволяет перейти к непосредственному решению задачи о цилиндрическом излучателе как вычисление оригиналов амплитуд смещения, задаваемых выражением (4). Здесь выделим действительный нуль знаменателя $\Delta(k, w)$ как

$$\Delta(k, w) = \tilde{\Delta}(k, w) (w^2 - w_0^2(k^2))$$

и далее

$$\bar{S}_0 \frac{\Delta_i}{\Delta} = \frac{A_i(k^2, w^2)}{\tilde{\Delta}(k^2, w^2)} + \frac{B_i(k^2)}{w^2 - w_0^2(k^2)}, \quad (6)$$

$$B_i(k^2) = \frac{\Delta_i(k^2, w_0)}{\tilde{\Delta}(k^2, w_0)} \bar{S}_0, \quad (i=1,2),$$

где $w_0(k^2)$ есть нули знаменателя Δ , которые в общем случае могут быть заданы в ограниченном квадранте $w_1 \leq w \leq w_2$, $k_0 \leq k \leq k_1$. Например, в нашем случае можно показать, что [4] $k_0 \leq k < \infty$,

$$\frac{P}{1,67} \leq k_0(g) \leq \frac{P}{1,31}, \quad w_1 = w_0(k_0^2), w_2 = \infty, k_1 = \infty.$$

Нахождение $w_0(k^2)$ численным методом показывает, что эту зависимость можно с высокой точностью (менее 3%) приблизить выражением

$$w_0^2 = c_R^2 k^2 + (c_2^2 - c_R^2) k_0^2 = c_R^2 k^2 + d^2; \quad k_0^2 = \frac{\bar{a}_0^2}{(1-g)},$$

где \bar{a}_0 – корень уравнения

$$\bar{a}_0 K_0(\bar{a}_0) - 2(1-g) K_1(\bar{a}_0) = 0.$$

Волной Био естественно назвать основную часть выражения (6), а именно

$$\begin{aligned} u_r^B &= \operatorname{Re} \int_{k_0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{B_1(k^2) \cos kz}{w^2 - w_0^2(k^2)} \cos wtdk dw = \\ &= -\frac{P}{2} \operatorname{Re} \int_{k_0}^{\infty} \frac{B_1(k^2) \cos kz \sin w_0(k^2)t}{w_0(k^2)} dk = -\frac{P}{2} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} b_1(z) u_r^d(z-z, t) dz, \end{aligned}$$

$$\text{где } b_1(z) = \int_0^{\infty} B_1(k^2) \cos kz dk,$$

$$\begin{aligned} u_r^d &= \int_{k_0}^{\infty} \frac{\cos kz \sin \sqrt{c_R^2 k^2 + d^2} t}{\sqrt{c_R^2 k^2 + d^2}} dk = \\ &= \frac{P}{2c_R} J_0 \left(\frac{d}{c_R} \sqrt{c_R^2 t^2 - z^2} \right) H(c_R^2 t^2 - z^2) + \text{рег. часть } u_r^d \end{aligned}$$

$$\text{рег. часть } u_r^d = - \int_0^{k_0} \frac{\cos kz \sin \sqrt{c_R^2 k^2 + d^2} t}{\sqrt{c_R^2 k^2 + d^2}} dk,$$

$$\frac{P}{2c_R} J_0(\cdot) H(c_R^2 t^2 - z^2) = \int_0^\infty \frac{\cos kz \sin \sqrt{c_R^2 k^2 + d^2} t}{\sqrt{c_R^2 k^2 + d^2}} dk, \quad [5];$$

$$u_z^B = -\frac{P}{2} \operatorname{Re} \int_0^\infty b_2(z) u_z^d(z-z, t) dz,$$

$$\text{где } b_2(z) = \int_0^\infty B_2(k^2) \cos kz \, dk,$$

$$u_z^d = \frac{\partial}{\partial z} u_r^d = \frac{P}{2c_R} [d(c_R t - z) + dc(c_R t + z)] +$$

$$+ J_1 \left(\frac{d}{c_R} \sqrt{c_R^2 t^2 - z^2} \right) \frac{d}{c_R} \frac{z}{\sqrt{c_R^2 t^2 - z^2}} H(c_R^2 t^2 - z^2) + \text{рег. часть } u_z^d$$

$$\text{рег. часть } u_z^d = \int_0^{k_0} \frac{k \sin kz \sin \sqrt{c_R^2 k^2 + d^2} t}{\sqrt{c_R^2 k^2 + d^2}} dk.$$

Таким образом, основным отличительным признаком волны Био совокупности волн является наличие в ее передаточной функции разрыва или, более того, разрыва d -образного типа для u_z , на фронте Релея $z = \pm c_R t$. Но, в отличие от волны Релея, величина этого разрыва меняется вдоль направления движения, т.е. происходит дисперсия волн, причем в радиальных перемещениях дисперсия развита более сильно, чем в продольной составляющей. Причиной этому является наличие в поставленной задаче запирающей частоты и волнового числа, которое также добавляет некоторую регулярную составляющую впереди фронта Релея $z = \pm c_R t$. В действительности наличие оператора $B(k^2)$ с точками ветвления ограничивает эту составляющую фронтами продольных $z = \pm c_1 t$ и поперечных $z = \pm c_2 t$ волн, изменяя характер особенности на фронте Релея.

В.М. Тищенко, Ю.А. Шевляков. **До задачі про циліндричний випромінювач.**

РЕЗЮМЕ. Досліджені перехідні процеси у пружному нескінченному середовищі, яке має циліндричну прямолінійну порожнину при ударном збудженні хвиль Біо нормальним вісесиметричним навантаженням (т.з. “задача про циліндричний випромінювач”), прикладеного до поверхні порожнини. Надано зрівняння з аналогічною проблемою у випадку плоскій поверхні (задача Лемба) для визначення впливу кривини опорної поверхні на досліджуємі процеси. Доведено, що хвилі Біо мають фронт, який рухається з швидкістю хвиль Релея,

амплітуда котрого змінюється вздовж напрямку руху (дісперсія) на відзначення від фронту хвиль Релея в задачі Лемба, що має постійну амплітуду.

V. N. Tishchenko, Ju.A. Shevljakov. **A problem of a cylindric radiator.**

SUMMARY. The transitional processes in an unlimited elastic medium with a cylindrical rectilinear cavity under striking excitation of the own Bio's waves are investigated. These processes are provoked by a normal axis-symmetrical loading (so called "a problem of a cylindric radiator"), which is attached to the cavity. Comparing with an analogous problem with a flat border (Lamb's problem) for surface curvature upon processes under study is done. It's proved that Bio's waves have a front moving with a speed of Reley's waves. This front amplitude is changing in direction of mathion (dispersion). It differs from Reley's waves front in Lamb's problem which amplitude stays constant.

Список использованной литературы

1. Сейсморазведка (Справочник геофизика) /Под редакцией И.И.Гурвича, В.П.Номоконова, - М.:Недра, 1981 – 464с.
2. Biot M.A. Propagation of Elastic Waves in a Cylindrical Bare Containing a Fluid, J. Appl. Phys., 23, 1952, pp.997-1005.
3. Новацкий В.В. Теория упругости, - М.: «Мир». 1975. – 872с.
4. Сницер А.Р. Поверхностные волны на полости в полубесконечной упругой среде.// Динамические системы. Вып.16. -2000.-с.70-80.
5. Рыжик И.М., Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.Изд.3. Гос.изд-во техн.л-ры, М-Л.: 1951,- 465с.

Поступила в редколлегию 08.09.03