УДК 519.6

Е.И. СТЕПАНОВА, ст. преподаватель, Крымск. гос. аграрн. у-нт.

О ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДАХ ПОЛУЧЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ФАКТОРОВ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ

В целом спектре задач принятия решений в условиях неопределенностей, значения критерия эффективности не определяются выбором стратегии только одной стороны. Простейший случай, когда неопределенные факторы носят случайный характер и имеется вероятностная мера $m(y)$, характеризующая распределение. Задача, когда $m(y)$ – неизвестна – математически может быть сформулирована как задача восстановления. С точки зрения приложений интерес, представляют классы борелевых мер ограниченной вариации, а также $\mathbf{L}_2$.

1. Приближение в классе борелевских мер ограниченной вариации. Пусть $x \in \mathbf{X}$ – допустимые стратегии стороны, принимающей решения; $y \in \mathbf{Y}$ – неопределенные факторы. Средний результат большого числа проведенных операций, при выборе стратегии $x \in \mathbf{X}$ в соответствии с законом больших чисел имеет вид:

$$m(x) = \int_{\mathbf{Y}} K(x, y) dm(y), \quad x \in \mathbf{X} \tag{1}$$

и естественно выбирать x^* так, чтобы

$$m(x^*) = \max_{x \in \mathbf{X}} m(x)$$

(x^* – оптимальная стратегия выбора решения).

Когда $m(y)$ – неизвестна по известной статистике $m(x)$ и известной функции $K(x, y)$ – необходимо восстановить модельную функцию, а именно $dm(y)$ – функцию плотности распределения вероятностей влияния случайных факторов.

В различных классах функций $m(y)$, где $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ – компакт, уравнение (1) – интегральное уравнение Фредгольма I-го рода, $K(x, y)$ – ядро оператора на $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$. Будем полагать, ядро (1) непрерывно на $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$, где $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ – компакты евклидова пространства, $m(y)$ – борелевская мера ограниченной вариации. Тогда для любого $d > 0$ существует конечная d-сеть: $x^{(d,1)}, \ldots, x^{(d,l)}$, обладающая свойством: $\max_{x\in \mathbf{X}} \min_{1\le s\le l} r(x, x^{(d,s)}) \le d$. Здесь r – евклидово расстояние. Вместе с тем, в силу непрерывности $K(x,y)$ на компакте $\mathbf{X}\times\mathbf{Y}$, для любого $e>0$ существует такое $d>0$, что:

$$\left\| K(x',y') - K(x'',y'') \right\| \le e,$$

если $r(x',x'')\le d$ и $r(y',y'')\le d$ (здесь x' и $x''\in \mathbf{X}$, а y' и $y''\in\mathbf{Y}$ – произвольные).

Для точек $x^{(1)},\dots,x^{(l)}\in\mathbf{X}$ задача

$$\int_{\mathbf{Y}} K(x^{(i)},y)dm(y) = m(x^{(i)}) \qquad (2)$$
$$i=1,\dots,l$$

имеет решение в том же классе функций, приближающее решение задачи (1).

У т в е р ж д е н и е 1: *Решение* (1) *существует тогда и только тогда, когда для любого* l *и произвольного набора* $x^{(i)}\in\mathbf{X}$ $(i=1,\dots,l)$, *существуют такие постоянные* l_j *и набор* $y^{(j)}\in\mathbf{Y}$ $(j=1,\dots,k)$ *и такое* $A>0$ $(A=\text{const})$, *независящее от* l *и* k, *что*

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{k} K(x^{(i)},y^{(j)})\, l_j = m(x^{(i)}); \\ &\sum_{j=1}^{k} \left| l_j \right| \le A; \qquad i=1,\dots,l. \end{aligned} \qquad (3)$$

Указывается [1], что для получения приемлемого приближения, достаточно, чтобы d-сеть по x была образована для достаточно малого d. Здесь приближенное решение (1) представимо в виде связки d-функций, что удобно приближать, например, урезанными плотностями распределения Гаусса с малыми среднеквадратическими отклонениями.

1. Приближение в $\mathbf{L}_2$. Рассмотрим задачу получения функции $u(y)$, что

$$\int_{\mathbf{Y}} K(x,y)u(y)dy = m(x), \quad x \in \mathbf{X} \tag{4}$$

($u(y)dy = dm(y)$, $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ – компакты евклидова пространства).

Как и прежде, $K(x,y) \in \mathbf{C}_{\mathbf{X}\times\mathbf{Y}}$; $m(x) \in \mathbf{C}_{\mathbf{X}}$,– неравная нулю тождественно. Норма в классе $\mathbf{L}_2$:

$$\|u(y)\|_{\mathbf{L}_2} = \left(\int_{\mathbf{Y}} u^2(y)dy \right)^{1/2}.$$

У т в е р ж д е н и е 2: *Решение* (4) *существует тогда и только тогда, когда для любого* l *и произвольного набора* $x^{(i)} \in \mathbf{X}$ $(i = 1,\dots,l)$ *существует такая функция* $\hat{u}(y) \in \mathbf{L}_2$ (*вообще говоря, зависящая от* $x^{(i)}$), *что*

$$\begin{gathered} \int_{\mathbf{Y}} K(x^{(i)}, y)\hat{u}(y)dy = m(x^{(i)}) \\ i = 1,\dots,l; \qquad \|\hat{u}(y)\|_{\mathbf{L}_2} \le A, \end{gathered} \tag{5}$$

где $A > 0$ *и не зависит от* l *и набора* $x^{(i)} \in \mathbf{X}$ $(i = 1,\dots,l)$.

Заметим, что результат, полученный в [1] обобщается на случай $\mathbf{L}_p$ с нормой

$$\|u(y)\|_{\mathbf{L}_p} = \left(\int_{\mathbf{Y}} u^p(y)dy \right)^{1/p}.$$

Определенным недостатком при получении приближений в приведенных выше классах функций является требование "густоты" d-сетей, хотя в $\mathbf{L}_p$ и может быть получена характеристика непрерывного ансамбля воздействий внешних факторов. Это подтверждает мысль, что для более точных оценок требуется статистика довольно больших объемов. С учетом некорректности (1) решение задачи зависит от d. Этого недостатка лишен подход связанный с сведением задачи (1) к изопериметрической [3].

2. Сведение задачи к изопериметрической. Рассматривается $\mathbf{K}^*$ – класс невырожденных в $\mathbf{X}\times\mathbf{Y}$ функций $K(x,y)$ возможно разрывных по x и дважды непрерывно дифференцируемых по y. Положим, что функция $u(y)$ – решение уравнения (4), где $K(x,y)\in \mathbf{K}^*$, – существует и притом единственна.

В области изменения переменной x проинтегрируем уравнение (4). Тогда получим соотношение

$$M=\int\limits_{\mathbf{X}} r(y)\hat{u}(y)dy, \tag{6}$$

которое при неизвестной функции $\hat{u}(y)$ можно рассматривать как интегральное уравнение. Здесь:

$$M=\tfrac{1}{\operatorname{mes}\mathbf{Y}}\int\limits_{\mathbf{X}} m(x)dx \tag{7}$$

и

$$r(y)=\tfrac{1}{\operatorname{mes}\mathbf{Y}}\int\limits_{\mathbf{X}} K(x,y)dx. \tag{8}$$

Уравнение (6) является некорректным и его решение $\hat{u}(y)$ возможно только аппроксимирует функцию $u(y)$ в области изменения x. Однако уравнение (6) может быть сведено к экстремальной задаче с целевым функционалом

$$\mathrm{J}(u)=\int\limits_{\mathbf{X}} \mathbf{F}(y,u(y),u'(y),...,u^{(n)}(y))dy, \tag{9}$$

а именно к изопериметрической вариационной задаче вида:

$$\mathrm{J}(\hat{u})=\int\limits_{\mathbf{X}} \mathbf{F}(y,\hat{u}(y),\hat{u}'(y),...,\hat{u}^{(n)}(y))dy \xrightarrow{\hat{u}} \min$$

с ограничением: $M=\int\limits_{\mathbf{X}} r(y)\hat{u}(y)dy.$

Необходимое условие экстремума (равенство нулю первой вариации соответствующего функционала) приводит к уравнению Эйлера-Пуассона

$$\frac{\partial}{\partial \hat{u}} L(y, l) + \sum_{r=1}^{n} (-1)^r \frac{d^r}{dy^r} \left(\frac{\partial}{\partial \left(\hat{u}^{(r)} \right)} L(y, l) \right) = 0$$

для функции Лагранжа: $L(y, l) = \mathbf{F}(y, \hat{u}(y), \hat{u}'(y), \ldots, \hat{u}^{(n)}(y)) + l\, r(y) \hat{u}(y)$.

О. І. Степанова. **Про наближені методи одержання характеристик невизначених факторів деяких класів**.

Р Е З Ю М Е. У цілому спектрі задач прийняття рішень в умовах невизначеностей, значення критерію ефективності не визначаються вибором стратегії тільки однієї сторони. Коли невизначені фактори носять випадковий характер і мається ймовірностна міра $m(y)$, що характеризує розподіл.

Пропонується метод зведення задачі до изопериметрической. З погляду додатків інтерес, представляють класи борелевых мір обмеженої варіації, а також $\mathbf{L}_2$.

E.I. Stepanova. **About aproximative methods of the reception of the features vague factor some classes.**

S U M M A R Y. In the certain set of problems support of decisions under the uncertainty, the efficacy criteria are not determined by the selection of the strategy only one person. When the uncertain factors are random and exists the stochastic $m(y)$-measure function, which described the random distribution.

In the different classes of function $m(y)$, the equation is an integrals Fredholm's equation of first kind. There is proposed the method in this papers, in which the recovering problem is reduced to isoperimertic one. From the view-point of the applications, the Borel's classes of bounded variation's measures and also $\mathbf{L}_2$.

Список использованной литературы

1. Давыдов Э.Г. Исследование операций. - М.: Высшая школа, 1990. - 380 с.
2. Сизиков В.С. Математические методы обработки результатов измерений: Учебник для вузов. - СПб.: Политехника, 2001. - 240 с.
3. Степанов А.В. Аппроксимация модельной функции интегрального уравнения Фредгольма I-го рода на основе сведения задачи к изопериметрической / Тезисы докл. Международн. мат. школы MFL'95, Симферополь, 1995.

Поступила в редколлегию 21.05.03