УДК 531.36

А.В. СТЕПАНОВ, д. техн. наук, Крымский аграрн. ун-т.

ПРИЛОЖЕНИЯ ОДНОРОДНЫХ ПОЛИНОМОВ К ИССЛЕДОВАНИЮ ОСОБЕННОСТЕЙ ПОВЕДЕНИЯ ТРАЕКТОРИЙ СИСТЕМ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ

Предлагается определенная методика исследования устойчивости систем дифференциальных уравнений, с правыми частями в виде однородных полиномов некоторой степени. Задача устойчивости таких систем приводит к необходимости исследования свойств знакоопределенности форм высокого порядка. Здесь, новый подход основан на применении формулы Пика и ее аналогов, а так же известной теоремы Эрмита.

Задача устойчивости систем с полиномиальными правыми частями приводит к необходимости использования однородных полиномов степени m $(m \geq 2)$, обладающих свойствами знакоопределенности. Некоторые методы решения этой задачи известны [1, 2].

1. Критерий знакоопределенности однородного полинома в конусе. В [2] приводится критерий знакоопределенности формы порядка m в конусе K, совпадающем с координатным углом.

В области

$$\mathrm{G} = \left\{ x: \quad 0 \leq \|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| < \infty, \quad x \in \mathrm{R}^n \right\}$$

рассмотрим функцию

$$W(x) = \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_m=i_{m-1}}^{n} a_{i_1 \ldots i_m} \cdot x_{i_1} \ldots x_{i_m} \ ,$$

где

$$m \geq 2 \ (m \in \mathrm{Z}_+) \text{ ,а } a_{i_1 \ldots i_{m-1} i_m} = a_{i_m i_1 \ldots i_{m-1}} = \ldots = a_{i_2 \ldots i_m i_1} = \mathrm{const}\,.$$

Обозначим конус [3]:

$$\mathrm{K}\{a_{10}, \ldots, a_{n0}\} = \{x \in \mathrm{R}^n, \ \ x_s \cdot a_{s0} \geq 0; \ \ s = 1, \ldots n\},$$

где $\{a_{s0}\}$- базис конуса $(a_{s0} = \pm 1)$. При этом: $a_{s0} \cdot x_s \geq 0$;. $a_{s0} = \mathrm{sign}(x_s), \ \ x_s \neq 0$.

Утверждение 1. *Для того, чтобы была положительно (отрицательно) определена в конусе* K, *необходимо и достаточно, чтобы системы нелинейных алгебраических уравнений*

$$\begin{cases} \sum\limits_{i_1=1}^{n} \dots \sum\limits_{i_m=1}^{n} a_{i_1 \dots i_m}^{(s)} \cdot x_{i_1} \dots x_{i_m} = a_{i_s 0} \cdot l \\ i_s \in s, \quad s = 1, \dots, m; \quad s \in \mathrm{Q}_{rn} \\ x_g = 0, \quad g = \mathrm{N} \setminus s; \quad x_g \in \mathrm{R}^{n-r} \end{cases} \tag{1}$$

$$r = 1, \dots, n$$

(*где* r *меняется от* 1 *до* n) *не имели ненулевых решений при* $l \le 0$ ($l \ge 0$), *целиком принадлежащих конусу.*

Здесь Q_{rn} - множество всех последовательностей $s = (i_1, \dots, i_r)$ составленных из чисел множества $\mathrm{N} = \{1, \dots, n\}$. В плоском случае, для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \cdot P(x, y) \\ \dot{y} = -y \cdot Q(x, y), \end{cases} \tag{2}$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ однородные полиномы одинаковой степени (например, $m-1$) функцию Ляпунова можно выбрать в виде $V(x, y) = a_{10} \cdot x + a_{20} \cdot y$. Тогда

$$\dot{V}(x, y)\Big|_{(2)} = A_{m0} x^m + \dots + A_{m-ll} x^{m-l} y^l + \dots + A_{0m} y^m = \Phi(x, y),$$

где A_{ij} - коэффициенты формы, полученные из коэффициентов системы (2) и элементов базиса конуса.

Утверждение 2. *Для положительной (отрицательной) определенности формы* $\Phi(x, y)$ *в конусе* $\mathrm{K}\{a_{10}, a_{20}\} \subset \mathrm{R}^2$, *необходимо и достаточно, чтобы системы*

$$\begin{cases} A_{m0} x^{m-1} + \frac{m-1}{m} A_{m-11} x^{m-2} y + \dots + \frac{m-l}{m} A_{m-ll} x^{m-l} y^l + \dots + \\ \qquad + \frac{1}{m} A_{1m-1} y^{m-1} = a_{10} \cdot l \\ \frac{1}{m} A_{m-11} x^{m-1} + \frac{2}{m} A_{m-22} x^{m-2} y + \dots + \frac{l}{m} A_{m-ll} x^{m-l} y^l + \dots + \\ \qquad + A_{0m} y^{m-1} = a_{20} \cdot l \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ A_{0m} y^{m-1} = a_{20} \cdot l \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ A_{m0} x^{m-1} = a_{10} \cdot l \end{cases} \tag{4}$$

не имели ненулевых решений в рассматриваемой области для любых $l \le 0$ ($l \ge 0$).

Если функция $\Phi(x, y)$ удовлетворяет утверждению 2 при $l \ge 0$, то нулевое решение системы (2) асимптотически устойчиво. Возникает вопрос о совместности систем вида (3) и (4) в рассматриваемой области.

2. Формула Пика и ее аналоги. Формула Пика [4] применяется в плоском случае для определения количества решений системы двух уравнений с двумя неизвестными и прямого аналога на случай большего количества переменных не имеет.

Многоугольник будем называть целым, если его вершины лежат в точках с целочисленными координатами. Пусть F-такой многоугольник, а $S(F)$-его площадь; $N(F)$-количество внутренних и граничных целых точек многоугольника. Тогда: $S(F) = N(F) - \frac{1}{2}B(F) - 1$, где $B(F)$- целые точки на границе F.

Утверждение 3. Число ненулевых решений системы

$$\begin{cases} R_1(x, y) = 0 \\ R_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

(*здесь* $R_i(x, y)$- *многочлены с вещественными коэффициентами*) *либо бесконечно, либо не превосходит величины* $N(2F) - 2N(F) + 1$, *где* $2F$- *многоугольник, полученный из* F *растяжением в два раза относительно начала координат* .

Фигура F- это многоугольник Ньютона для многочленов R_i. *Очевидно, что число ненулевых решений системы не превосходит удвоенной площади ее многоугольника Ньютона, либо бесконечно.*

Для любого целого многоугольника F функция $N(nF)$- многочлен второй степени от n $(n \ge 0,\ n \in \mathrm{Z}_+)$ и $2S(F) = N(2F) - 2N(F) + 1$.

Для трех уравнений с тремя неизвестными формула примет вид:

$$6V(F) = N(2F) - 2N(F) - B(F) + 3 \tag{5}$$

где F - уже объемная многогранная фигура с вершинами в целых точках, а $V(F)$ - ее объем. И для системы n уравнений с n неизвестными:

$$\begin{gathered} n!V(F) = a_1 N((n-1)F) + a_2 N((n-2)F) + \\ + \ldots + a_{n-1} N(F) + a_n B(F) + b \end{gathered}, \tag{6}$$

где $a_1, \ldots, a_n, b$ - некоторые числовые коэффициенты.

Некоторое обобщение метода результантов [5], позволяет свести систему уравнений к одному уравнению типа $P_s(t) = 0$, где $P_s(t)-$ полином степени s, $t-$одна из компонент вектора решений рассматриваемой системы.

3. Теорема Эрмита и ее приложение. Согласно известной теореме Ш. Эрмита [6]. Для того, чтобы корни t_i уравнения $P_s(t) = 0$ лежали строго в левой полуплоскости ($\mathrm{Re}\,elt_i < 0$) необходимо и достаточно, чтобы была строго положительно определена некоторая матрица $\Re$, коэффициенты которой определяются с помощью производящей функции

$$\sum_{k=1}^{s}\sum_{l=1}^{s} \Re_{kl} x^{k-1} y^{l-1} = \frac{P_s(x)P_s(y) - P_s(-x)P_s(-y)}{x+y}. \tag{7}$$

Например, для $s = 3$ матрица $\Re$ будет иметь вид

$$\Re = \begin{pmatrix} 2p_2 p_3 & 0 & 2p_3 \\ 0 & 2(p_1 p_2 - p_3) & 0 \\ 2p_3 & 0 & 2p_1 \end{pmatrix}.$$

Вместе с уравнением $P_s(t) = 0$ рассмотрим дифференциальное уравнение

$$u^{(s)} + p_1 u^{(s-1)} + \ldots + p_{s-1} u' + p_s u = 0. \tag{8}$$

Вводя в рассмотрение вектор

$$W = \begin{pmatrix} u \\ \dfrac{du}{dt} \\ --- \\ \dfrac{d^{s-1}u}{dt^{s-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ --- \\ w_s \end{pmatrix},$$

уравнение (8) сводится к системе:

$$\frac{dw}{dt} = Aw, \tag{9}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -p_s & -p_{s-1} & -p_{s-2} & \dots & -p_1 \end{pmatrix}.$$

Тогда, если система (9) асимптотически устойчива, то $\Re$ положительно определена, а все корни уравнения $P_s(t) = 0$ лежат в левой полуплоскости. Верно и обратное. В свою очередь, системы (3) и (4) утверждения 2 обладают необходимыми для знакоопределенности соответствующей формы $\Phi(x, y)$ свойствами, что дает возможность сделать определенные выводы относительно системы дифференциальных уравнений вида (2) (случай $n = 2$). Можно поступить иначе: сразу построить функцию Ляпунова V с заданными свойствами и по ней построить систему вида (9) со свойствами асимптотической устойчивости (что наложит дополнительные условия на коэффициенты V и исследуемую систему). Результат обобщается на случай произвольного n.

Замечание. *Метод приводит к достаточным условиям.*

Рассмотрим в области $\mathrm{G} = \{(x, y): \ x \geq 0, \ y \geq 0\}$ систему вида

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = -y(x^2 + y^2). \end{cases} \tag{10}$$

Траектории системы с начальными данными из G не покидают ее пределов с течением времени [7]. Для $V(x, y) = x + y$, найдем ее полную производную:

$$\dot{V}(x, y)\Big|_{(10)} = -x(x^2 + y^2) - y(x^2 + y^2) =$$

$$-(x + y)(x^2 + y^2) = \Phi(x, y),$$

которая в G отрицательно определена. Следовательно, система (10) асимптотически устойчива. Вместе с тем, на основании утверждения 2, получим системы

$$\begin{cases} -x^2 - \frac{2}{3}xy - \frac{1}{3}y^2 = l \\ -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}xy - y^2 = l, \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ -y^2 = l, \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ -x^2 = l, \end{cases} \tag{12}$$

которые действительно не имеют ненулевых решений в G при $l \geq 0$. Для системы (11): $S(F) = 4$; $N(F) = 9$; $B(F) = 8$; $N(2F) = 25$ и согласно формулы Пика эта система может вообще иметь не более 8 решений:

$$N(2F) - 2N(F) + 1 = 25 - 18 + 1 = 8.$$

Перепишем систему (11) в несколько ином виде

$$\begin{cases} -x^2 - (\frac{2}{3}y)x - (\frac{1}{3}y^2 + l) = 0 \\ (-\frac{1}{3})x^2 - (\frac{2}{3}y)x - (y^2 + l) = 0 \end{cases}$$

и составим результант ее уравнений, приравняв его к нулю

$$\begin{vmatrix} -1 & -\frac{2}{3}y & -(\frac{1}{3}y^2 + l) & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{2}{3}y & -(\frac{1}{3}y^2 + l) \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}y & -(y^2 + l) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}y & -(y^2 + l) \end{vmatrix} = 0.$$

Откуда $$(y^2 + l)^2 - \frac{5}{9}(y^2 + l)(\frac{1}{3}y^2 + l) = 0$$

или

$$(y^2 + l)(\frac{22}{27}y^2 + \frac{4}{9}l) = 0$$

и вещественных решений в G при $l \geq 0$ нет. Тогда: $P_s(t) = t^4 + \frac{17}{11}lt^2 + \frac{6}{11}l^2 = 0$, где корни t_i $(i = 1,\dots,4)$ - компоненты y решений системы (11). Уравнение соответствующее (8) имеет вид $u^{IV} + \frac{17}{11}lu'' + \frac{6}{11}l^2u = 0$, а матрица

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{6}{11}l^2 & 0 & -\frac{17}{11}l & 0 \end{pmatrix},$$

соответствующей (9) системы, имеет две пары мнимых собственных значений $m_{1/2}=\pm i\sqrt{l}$, $m_{3/4}=\pm i\sqrt{\frac{6}{11}l}$. Что означает, что нулевое решение устойчиво, но не асимптотически. Уравнение $P_s(t)=0$-биквадратное и $P_s(t)=P_s(-t)$. Следовательно:

$$\sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}\Re_{kl}x^{k-1}y^{l-1}=\frac{P_4(x)P_4(y)-P_4(-x)P_4(-y)}{x+y}\equiv 0.$$

Откуда $\Re\equiv 0$, т.е. матрица $\Re$ знакопостоянна.

А.В. Степанов. **Додатка однорідних поліномів до дослідження особливостей поводження траєкторій систем деяких класів.**

РЕЗЮМЕ. Пропонується критерій знаковизначеністі однорідних поліномів ступеня m в конусі $K\{a_{10},...,a_{n0}\}$ простору $\mathbf{R}^n$, а також метод дослідження цих властивостей. Це дозволило спростити рішення задачі стійкості систем диференціальних рівнянь з поліноміальними правими частинами. Результати становлять інтерес у додатках до проблеми стійкості динамічних моделей деяких класів.

A.V. Stepanov**. Exhibits uniform multinomial to the study of the particularities of the behaviour system path some classes**

SUMMARY. A sign-definite criterion of a homogeneous polynomial of degree m in a cone $K\{a_{10},...,a_{n0}\}$of space $\mathbf{R}^n$ is proposed and also a method investigating these properties. This enables the solution of stability problem of the systems of differential equations with polynomial right-hand sides to be simplified. These results are interested in applications in the stability problem of same classes dynamical models.

Список использованной литературы

1. Аминов А.Б., Сиразетдинов Т.К. Условия знакоопределенности четных форм и устойчивость в целом нелинейных однородных систем // ПММ. 1984. Вып. 3. С. 339-347.
2. Степанов А.В. Критерий знакоопределенности однородных полиномов в конусе // ПММ. 1992. Вып. 4. С. 676-679.
3. Персидский С.К. К вопросу об абсолютной устойчивости // Автоматика и телемеханика. 1969. № 12. С. 5-11.
4. Pick G. Geometrisches zur Zahlenlehre.- Z.d.Verienes Lotos, Praga,1899.
5. Курош А.Г. Курс высшей алгебры .- М.: Наука, 1968,- 432 с.
6. Годунов С.К. Квадратичные функции Ляпунова // Учебное пособие. Изд-во НГУ. Новосибирск, 1982. -80 с.
7. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. - М.: Физматгиз, 1962.- 366 с.

Поступила в редколлегию 06.05.03

