УДК 539.3

А.Р. СНИЦЕР, канд.физ.-мат.наук, Таврический нац. ун-т

ДИНАМИКА МНОГОСЛОЙНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

Рассмотрена основная и смешанная задачи о колебаниях многослойной упругой среды с цилиндрической полостью при осесимметричном гармоническом нагружении ее верхней границы. Для решения задачи используются интегральные преобразования Вебера и метод начальных параметров. В случае смешанных условий на верхней границе задача формулируется в виде парных уравнений, которые сводятся к уравнению Фредгольма второго рода. Рассмотрен вопрос единственности решения задачи и указаны алгоритмы ее численной реализации.

Введение. Решение динамических задач теории упругости в точной постановке имеет важное практическое значение, т.к. позволяет определять амплитудно- и фазово-частотные характеристики колебаний сооружений на упругом основании (для контактных задач), закон распределения напряжений под сооружением, а также изучать распространение упругих волн в грунте. Такие задачи для сплошной и слоистой упругой среды достаточно полно исследовались во многих работах, например [1-3,13]. Немалый практический интерес вызывают основные и смешанные динамические задачи для слоистой упругой среды с цилиндрической полостью, которые моделируют неоднородные основания с шахтным стволом и надшахтными сооружениями, пласты с нефтяной скважиной и др.

Динамические задачи для упругого полупространства и слоя с полостью при вертикальных воздействиях на верхнюю границу исследовались в работах [4-6]. Здесь мы рассмотрим не изученную ранее задачу о подобном динамическом воздействии на многослойное основание с шахтным стволом.

1. Колебания многослойного пакета с цилиндрической выемкой. Граничные условия. Рассмотрим n- слойную упругую среду с цилиндрической полостью, образующие которой перпендикулярны границам слоев. Упругие свойства k-го слоя характеризуются плотностью r_k, модулем сдвига m_k, коэффициентом Пуассона n_k и модулем Юнга E_k, которые считаются постоянными в пределах слоя. Все слои считаются однородными, изотропными и гладкими. При деформации слои не отстают друг от друга, и трение на границах слоев отсутствует. На верхней границе пакета $z=0$ отсутствуют касательные напряжения и задано нормальное перемещение, изменяющееся во времени по закону $\exp(iwt)$. Пакет свободно лежит на недеформируемом основании и не отстает от него, так что на нижней его границе касательные напряжения и нормальные перемещения равны нулю. Цилиндрическая полость, пронизывающая слои считается подкрепленной и в цилиндрической системе координат (r, j, z) занимает область $z \geq 0$, $r \leq a$.

Введем локальные системы координат в каждом слое. Это позволит использовать матричный метод решения краевых задач, дающий возможность выразить напряженно-деформированное состояние (НДС) любого слоя через условия на верхней и нижней границах пакета. Координаты r, j, z, при необходимости будем наделять нижним индексом k, определяющим номер слоя, когда же ясно, что координаты относятся к k-му слою, индекс будем опускать. Нумерация слоев идет от верхнего к нижнему так, что для первого слоя на верхней границе $z_1 = 0$, а на нижней его границе $z_1 = h_1$. Таким образом, k-й слой в такой локальной системе координат занимает область $r_k \geq a$, $0 \leq z_k \leq h_k$.

Сформулируем математически указанные выше граничные условия для данного n- слойного пакета.

Для верхней границы 1-го слоя имеем:

$$t_{zr}^{(1)}\Big|_{z=0} = t_{zj}^{(1)}\Big|_{z=0} = 0, \quad u_z^{(1)}\Big|_{z=0} = C(r)\cdot\exp(iwt), \qquad r \geq a. \tag{1.1}$$

На нижней границе n- го слоя:

$$t_{zr}^{(n)}\Big|_{z=h_n} = t_{zj}^{(n)}\Big|_{z=h_n} = 0, \quad u_z^{(n)}\Big|_{z=h_n} = 0, \qquad r \geq a. \tag{1.2}$$

Условия контакта соседних слоев, предполагающие их гладкость и неотставание друг от друга, имеют вид:

$$t_{zr}^{(k)}\Big|_{z=0} = t_{zr}^{(k-1)}\Big|_{z=h_{k-1}} = 0, \quad u_z^{(k)}\Big|_{z=0} = u_z^{(k-1)}\Big|_{z=h_{k-1}}, \qquad r \geq a. \tag{1.3}$$

Условия на границе цилиндрической полости в каждом слое имеют вид:

$$t_{zr}^{(k)}\Big|_{r=a} = t_{zj}^{(k)}\Big|_{r=a} = 0, \quad u_r^{(k)}\Big|_{r=a} = 0. \tag{1.4}$$

В условиях (1.1)-(1.4) верхний индекс означает номер слоя.

2. Решение уравнения Ламэ для слоя с подкрепленной цилиндрической полостью. Построим решение сформулированной краевой задачи для произвольного (k-го) слоя. Вектор перемещений в таком слое в отсутствии массовых сил удовлетворяет уравнению Ламэ:

$$c_2^2\nabla^2\vec{u}+(c_1^2-c_2^2)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})=\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}\ , \qquad (2.1)$$

где $c_1=\sqrt{2m_k(1-n_k)/r_k(1-2n_k)}$, $c_2=\sqrt{m_k/r_k}$ – скорости продольных и поперечных волн в k- м слое.

Для построения решения уравнения (2.1) воспользуемся представлением Ламэ:

$$\vec{u}=(\vec{\nabla}y_0+\vec{\nabla}\times\vec{y})\cdot\exp(iwt),\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{y}=0, \qquad (2.2)$$

где $y_0(r,j,z)$ – скалярный, $\vec{y}(r,j,z)=\{y_1,y_2,y_3\}$ – векторный потенциалы.

Условия (1.1) на верхней границе пакета и условия на полости (1.4) не зависят от угловой координаты, поэтому задача обладает осевой симметрией, в силу чего всюду полагаем $\partial/\partial j\equiv 0$.

Потенциалы для k- го слоя разыскиваем в виде:

$$y_0^{(k)}(r,z)=\int_0^\infty x\left[A_0^{(k)}(x)\exp\left(-zk_1^{(k)}\right)+B_0^{(k)}(x)\exp\left(zk_1^{(k)}\right)\right]G_{1,0}(x,r)dx\ , \qquad (2.3)$$

$$y_2^{(k)}(r,z)=-i\int_0^\infty x^2\left[A_1^{(k)}(x)\exp\left(-zk_2^{(k)}\right)+B_1^{(k)}(x)\exp\left(zk_2^{(k)}\right)\right]G_{1,1}(x,r)dx\ , \qquad (2.4)$$

$$y_1^{(k)}(r,z)=y_3^{(k)}(r,z)\equiv 0,\quad k_{1,2}^{(k)}=\sqrt{x^2-[k_{1,2}^{(k)}]^2},\quad k_{1,2}^{(k)}=w/c_{1,2}^{(k)}, \qquad (2.5)$$

$G_{1,n}(x,r)=c_{1,n}(x,r)\cdot\left|H_1^{(2)}(xa)\right|^{-2},(n=0,1)$; $c_{1,n}(x,r)=J_1(xa)Y_n(xr)-$ $-J_n(xr)Y_1(xa)$ – ядро преобразований Вебера [7,8]; $J_n(x)$, $Y_n(x)$, $H_1^{(2)}(x)$ – цилиндрические функции.

В данном случае, тензор напряжений и вектор перемещений имеют вид:

$$\hat{s}=\begin{pmatrix} s_{rr} & 0 & t_{rz} \\ 0 & s_{jj} & 0 \\ t_{zr} & 0 & s_{zz}\end{pmatrix},\qquad \vec{u}=u_r\vec{e}_r+u_z\vec{e}_z\,. \qquad (2.6)$$

Компоненты НДС выражаются через потенциалы (2.3), (2.4):

$$s_{rr}=-m\left\{\left[2\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)+k_2^2\right]y_0+2\frac{\partial^2 y_2}{\partial r\,\partial z}\right\},$$

$$s_{jj} = m\left\{\left[(2k_1^2 - k_2^2) + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]y_0 - \frac{2}{r}\frac{\partial y_2}{\partial z}\right\},$$

$$s_{zz} = m\left\{(2\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2k_1^2 - k_2^2)y_0 + 2\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ry_2)\right\},$$

$$t_{rz} = m\left\{2\frac{\partial^2 y_0}{\partial r\,\partial z} - \left(2\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_2^2\right)y_2\right\},$$

$$u_r = \frac{\partial y_0}{\partial r} - \frac{\partial y_2}{\partial z}, \qquad u_z = \frac{\partial y_0}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ry_2). \tag{2.7}$$

3. Метод начальных параметров. Выражение матрицы НДС через начальные параметры для произвольного слоя. Для решения краевой задачи воспользуемся методом начальных параметров, развитым в работах [9,10]. Этот метод широко использовался в статических задачах для сплошного многослойного основания и в отдельных работах для решения динамических задач, например [3]. В рассматриваемой нами задаче, геометрия которой усложняется наличием цилиндрической полости, также представляется возможным использовать метод начальных параметров.

Решения (2.3),(2.4) тождественно удовлетворяют условиям (1.4) на поверхности полости в каждом слое, поэтому сопряжение решений необходимо проводить лишь на плоских границах слоев, что и позволяет применить метод начальных параметров.

Выразим неизвестные плотности интегралов (2.3), (2.4) через начальные параметры a_k, b_k, g_k, d_k, в качестве которых примем:

$$xa_k(x) = \overline{s}_{zz}^{(k)}(x,0), \qquad xb_k(x) = \overline{\overline{t}}_{zr}^{(k)}(x,0), \qquad g_k(x) = g_k\,\overline{u}_z^{(k)}(x,0),$$

$$d_k(x) = g_k\overline{\overline{u}}_r^{(k)}(x,0), \qquad g_k = \frac{E_k}{2(1-n_k^2)} = \frac{m_k}{1-n_k}. \tag{3.1}$$

В (3.1) правые части представляют изображения соответствующих компонент НДС в пространстве преобразований Вебера, причем одна черта над функцией означает преобразование Вебера с ядром $c_{1,0}(x,r)$, а две черты – соответствуют ядру $c_{1,1}(x,r)$.

Используя (2.7), (2.3), (2.4), найдем преобразования Вебера соответствующих компонент НДС при $z = 0$ и подставим их в (3.1). В результате получим систему линейных алгебраических уравнений относительно интегральных плотностей, входящих в выражения для потенциалов (2.3), (2.4). Из этой системы выражаем интегральные плотности через начальные параметры. В силу граничного условия (1.1) – $t_{zr}^{(1)}\Big|_{z=0}=0$ и $t_{zr}^{(k)}\Big|_{z=0}=0$, полагаем в (3.1) $b_k(x)\equiv 0$.

Подставим интегральные плотности, полученные при решении системы (3.1), в еще неиспользованное условие (1.3) – $t_{zr}^{(k)}\Big|_{z=h_k}=0$ на нижней границе k-го слоя, которое имеет вид :

$$2k_1^{(k)}\left[A_0^{(k)}(x)\exp\left(-h_1^{(k)}\right)-B_0^{(k)}(x)\exp\left(h_1^{(k)}\right)\right]+$$
$$+i\left[2x^2-(k_2^{(k)})^2\right]\left[A_1^{(k)}(x)\exp\left(-h_2^{(k)}\right)+B_1^{(k)}(x)\exp\left(h_2^{(k)}\right)\right]=0, \qquad (3.2)$$
$$h_{1,2}^{(k)}=h_k k_{1,2}^{(k)}.$$

Из последнего следует линейная зависимость параметра d_k от a_k и g_k:

$$d_k(x)=\frac{x^2\left(2k_1^{(k)}k_2^{(k)}sh\,h_1^{(k)}-c\,sh\,h_2^{(k)}\right)}{(1-n_k)T_k}a_k(x)+2x\,k_2^{(k)}cbg_k(x),$$

$$T_k=c^2sh\,h_2^{(k)}-4x^2k_1^{(k)}k_2^{(k)}sh\,h_1^{(k)}. \qquad (3.3)$$

В итоге интегральные плотности потенциалов (2.3),(2.4) выражаются через два начальных параметра – a_k, g_k и принимают вид:

$$A_0^{(k)}(x)=\frac{c}{2k_1^{(k)}(k_2^{(k)})^2}\left[a^{(k)}\,sh\,h_2^{(k)}a_k-(4x^2k_1^{(k)}k_2^{(k)}b^{(k)}-1)g_k^*\right],$$

$$B_0^{(k)}(x)=\frac{c}{2k_1^{(k)}(k_2^{(k)})^2}\left[a^{(k)}\,sh\,h_2^{(k)}a_k-(4x^2k_1^{(k)}k_2^{(k)}b^{(k)}+1)g_k^*\right],$$

$$A_1^{(k)}(x)=-\frac{1}{i(k_2^{(k)})^2}\left[a^{(k)}\,sh\,h_1^{(k)}a_k-(c^2b^{(k)}-1)g_k^*\right],$$

$$B_1^{(k)}(x)=\frac{1}{i(k_2^{(k)})^2}\left[a^{(k)}\,sh\,h_1^{(k)}a_k-(c^2b^{(k)}+1)g_k^*\right], \qquad a^{(k)}=\frac{x\,k_1^{(k)}(k_2^{(k)})^2}{m_kT_k},$$

$$b^{(k)}=\left(ch\,h_1^{(k)}-ch\,h_2^{(k)}\right)\Big/T_k, \qquad c=2x^2-(k_2^{(k)})^2, \quad g_k^*=g_k\,g_k^{-1}. \qquad (3.4)$$

Для сопряжения решений в различных слоях на границах контактов используем матричный подход. Введем столбцевую матрицу начальных параметров $-X_k(x)$ и матрицу $\overline{V}_k(x,z_k)$, изображений Вебера нормальной компоненты напряжения $s_{zz}(r,z_k)$ и компоненты вектора перемещений $u_z(r, z_k)$ в любой точке $0 \le z_k \le h_k$ k-го слоя:

$$X_k(x) = \begin{Vmatrix} a_k(x) \\ g_k(x) \end{Vmatrix}, \qquad \bar{V}_k(x, z_k) = \begin{Vmatrix} \bar{s}_{zz}^{(k)}(x, z_k) \\ \bar{u}_z^{(k)}(x, z_k) \end{Vmatrix}. \tag{3.5}$$

На основании выражений (2.7) для s_{zz}, u_z и выражний (2.4), (2.5), (3.3), (3.4), имеем матричное выражение:

$$\bar{V}_k(x, z_k) = D_k(x, z_k) X_k(x), \tag{3.6}$$

где $D_k(x, z_k)$– матрица второго порядка:

$$D_k(x, z_k) = \begin{Vmatrix} d_{11}^{(k)}(x, z_k) & d_{12}^{(k)}(x, z_k) \\ d_{21}^{(k)}(x, z_k) & d_{22}^{(k)}(x, z_k) \end{Vmatrix}, \tag{3.7}$$

элементы которой имеют вид:

$$d_{11}^{(k)}(x, z_k) = x\left(c^2 sh\, h_2 ch\, z_1 - 4x^2 k_1^{(k)} k_2^{(k)} sh\, h_1 ch\, z_2\right)\Big/ T_k\ ,$$

$$d_{12}^{(k)}(x, z_k) = \frac{m_k g_k^{-1}}{x k_1^{(k)} (k_2^{(k)})^2}\left\{4x^2 k_1^{(k)} k_2^{(k)}\left[c^2 b^{(k)}\left(ch z_2 - ch z_1\right) + sh z_2\right] - c^2 sh z_1\right\},$$

$$d_{21}^{(k)}(x, z_k) = x\, k_1^{(k)}\left(c\, sh h_2 sh z_1 - 2x^2 sh h_1 sh\, z_2\right)\Big/ m_k T_k\ ,$$

$$d_{22}^{(k)}(x, z_k) = \frac{g_k^{-1}}{(k_2^{(k)})^2}\left[2x^2 c b^{(k)}\left(c\, sh z_2 - 2k_1^{(k)} k_2^{(k)} sh z_1\right) + 2x^2 ch z_2 - c\, ch z_1\right], \tag{3.8}$$

где $z_{1,2} = k_{1,2}^{(k)} z_k$.

4. Рекурентные соотношения для начальных параметров соседних слоев. Матрице НДС в k-м слое в пространстве изображений Вебера $\bar{V}_k(x, z_k)$ соответствует матрица оригиналов:

$$V_k(r, z_k) = \begin{Vmatrix} s_{zz}^{(k)}(r, z_k) \\ u_z^{(k)}(r, z_k) \end{Vmatrix}. \tag{4.1}$$

Начальные параметры произвольного слоя будем определять из условия контакта соседних слоев и граничных условий для многослойной среды в целом.

Условия контакта слоев, кроме отсутствия отставания и трения между ними, предполагают также равенство нормальных напряжений. Используя (4.1), эти условия запишем в виде:

$$V_{k+1}(r,0)=V_k(r,h_k), \tag{4.2}$$

а в пространстве изображений Вебера:

$$\overline{V}_{k+1}(x,0)=\overline{V}_k(x,h_k). \tag{4.3}$$

С учетом (3.6) последнее условие принимает вид:

$$D_{k+1}(x,0)X_{k+1}(x)=D_k(x,h_k)X_k(x). \tag{4.4}$$

Разрешив (4.4) относительно $X_{k+1}(x)$, приходим к рекуррентному соотношению, связывающему начальные параметры соседних слоев:

$$X_{k+1}(x)=\Phi_k(x)X_k(x), \tag{4.5}$$

где $\Phi_k(x)$– переходная матрица:

$$\Phi_k(x)=D_{k+1}^{-1}(x,0)D_k(x,h_k). \tag{4.6}$$

Перемножая матрицы в правой части выражения (4.6), получим:

$$\Phi_k(x)=\begin{Vmatrix} d_{11}^{(k)}(x,h_k) & d_{12}^{(k)}(x,h_k) \\ g_{k+1}d_{21}^{(k)}(x,h_k) & g_{k+1}d_{22}^{(k)}(x,h_k) \end{Vmatrix}, \tag{4.7}$$

где g_{k+1} определено в (3.1), а $d_{ij}^{(k)}(x,h_k)$ – в (3.8).

5. Определение начальных параметров первого слоя и выражение через них НДС любого слоя. Полагая в рекуррентном соотношении (4.5) $k=1$, получим связь начальных параметров 1-го и 2-го слоев пакета:

$$X_2(x)=\Phi_1(x)X_1(x). \tag{5.1}$$

Полагая теперь в (4.5) $k=2$ и учитывая (5.1), получаем: $X_3(x)=\Phi_1(x)\Phi_2(x)X_1(x)$. Повторение этого процесса k раз приводит к соотношению, связывающему начальные параметры $(k+1)$-го слоя пакета с параметрами 1-го слоя:

$$X_{k+1}(x)=M^{(k)}(x)X_1(x), \tag{5.2}$$

где матрица $M^{(k)}(x)$ определяется как произведение k переходных матриц (4.7):

$$M^{(k)}(x)=\prod_{l=1}^{k}\Phi_l(x). \tag{5.3}$$

Подставляя (5.2) в (3.6), получим выражение матрицы НДС k-го слоя в пространстве преобразований Вебера через начальные параметры 1-го слоя:

$$\overline{V}_k(x, z_k) = P_k(x, z_k) X_1(x), \tag{5.4}$$

где введена матрица $P_k(x, z_k)$, равная произведению известных матриц (3.7), (5.3):

$$P_k(x, z_k) = D_k(x, z_k) M^{(k-1)}(x) = \begin{Vmatrix} P_{11}^{(k)}(x, z_k) & P_{12}^{(k)}(x, z_k) \\ P_{21}^{(k)}(x, z_k) & P_{22}^{(k)}(x, z_k) \end{Vmatrix}. \tag{5.5}$$

Для определения $\overline{V}_k(x, z_k)$ в (5.4) остается найти лишь матрицу начальных параметров 1-го слоя $-X_1(x)$. Эту матрицу находим из граничных условий (1.1), (1.2) для компонент вектора перемещений $u_z^{(k)}(r_k, z_k)$ на верхней $(z_1 = 0)$ и нижней $(z_n = h_n)$ границах пакета.

Запишем матричное соотношение (5.4) на верхней границе 1-го слоя $(z_1 = 0)$, которое в силу (5.5),(5.3),(4.7) и (3.8) приобретает вид:

$$\begin{Vmatrix} \overline{s}_{zz}^{(1)}(x,0) \\ \overline{u}_z^{(1)}(x,0) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x & 0 \\ 0 & g_1^{-1} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a_1(x) \\ g_1(x) \end{Vmatrix}. \tag{5.6}$$

Выражаем из (5.6) $\overline{u}_z^{(1)}(x,0) = g_1^{-1} g_1(x)$ и подставляем в граничное условие (1.1) – $u_z^{(1)}(r,0) = C(r)$, применяя к нему предварительно преобразование Вебера. В итоге получим:

$$g_1(x) = g_1 \overline{C}(x). \tag{5.7}$$

На границе нижнего слоя $z_n = h_n$ (5.4) дает:

$$\begin{Vmatrix} \overline{s}_{zz}^{(n)}(x, h_n) \\ \overline{u}_z^{(n)}(x, h_n) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} P_{11}^{(n)}(x, h_n) & P_{12}^{(n)}(x, h_n) \\ P_{21}^{(n)}(x, h_n) & P_{22}^{(n)}(x, h_n) \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a_1(x) \\ g_1(x) \end{Vmatrix},$$ откуда следует:

$$\overline{u}_z^{(n)}(x, h_n) = P_{21}^{(n)}(x, h_n) a_1(x) + P_{22}^{(n)}(x, h_n) g_1(x). \tag{5.8}$$

Подставляя (5.8) в условие (1.2) – $u_z^{(n)}(r_n, h_n) = 0$, применяя к последнему предварительно преобразование Вебера и учитывая (5.7), получим:

$$a_1(x) = -\frac{P_{22}^{(n)}(x, h_n)}{P_{21}^{(n)}(x, h_n)} g_1 \overline{C}(x). \tag{5.9}$$

Найденная матрица начальных параметров 1-го слоя, выраженная через граничные условия на нижней и верхней поверхностях n-слойного пакета, имеет вид:

$$X_1(x)=\left\| \begin{matrix} a_1(x) \\ g_1(x) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} -\dfrac{P_{22}^{(n)}(x,h_n)}{P_{21}^{(n)}(x,h_n)} \\ 1 \end{matrix} \right\| \cdot g_1\overline{C}(x). \qquad (5.10)$$

Таким образом вместе с (5.5) и (5.10) матрица (5.4) – $\overline{V}_k(x,z_k)$, НДС k-го слоя, в пространстве преобразований Вебера определена. Применяя обращение преобразований Вебера к (5.4) получим матрицу НДС k-го слоя:

$$V_k(r,z_k)=\left\| \begin{matrix} s_{zz}^{(k)}(r,z_k) \\ u_z^{(k)}(r,z_k) \end{matrix} \right\| = \int_0^\infty x\, P_k(x,z_k) X_1(x) G_{1,0}(x,r)dx\ . \qquad (5.11)$$

Согласно (5.11) определяются лишь компоненты $s_{zz}^{(k)}(r,z_k)$ и $u_z^{(k)}(r,z_k)$ НДС. Однако, зная $X_1(x)$ и, следовательно, согласно (5.2), матрицу начальных параметров k-го слоя, по формулам (3.4) через них можно выразить интегральные плотности потенциалов (2.3), (2.4), а затем согласно (2.7) и все остальные компоненты НДС n-слойного пакета.

В пунктах **1-5** в замкнутом виде решена краевая задача о стационарных вертикальных колебаниях многослойной упругой среды с цилиндрической полостью при граничных условиях (1.1)-(1.4). Рассмотренная задача имеет самостоятельное значение. Ее решение позволяет на основе экспериментального определения смещений верхней границы слоистой упругой среды на жестком основании определить напряжения и перемещения в любой ее части.

Полученное решение может быть использовано и как вспомогательное, для решения задачи со смешанными условиями на верхней границе пакета. Далее будет рассмотрена смешанная краевая задача для слоистой упругой среды данной геометрии.

6. Смешанная динамическая задача для n-слойного упругого основания с цилиндрической полостью. Рассмотрим смешанную динамическую краевую задачу для n-слойного упругого основания, описанного в пункте **1.** Смешанные граничные условия реализуются на поверхности $z_1=0$ верхнего слоя, разделяются круговой линией – $r=b$ и имеют вид:

$$u_z^{(1)}(r,0)=C(r)\cdot\exp(iw\,t), \quad b>r>a; \qquad (6.1)$$

$$s_{zz}^{(1)}(r,0)=0, \quad r>b. \qquad (6.2)$$

Тангенциальные напряжения, на верхней границе первого слоя по-прежнему отсутствуют: $t_{zr}^{(1)}(r,0)=0,\ r>a$. Условия взаимодействия слоев, условие на нижней границе n-го слоя, и условия на поверхности полости также остаются прежними: (1.2)-(1.4).

Для решения смешанной задачи, запишем согласно (5.9)-(5.11) выражения $u_z^{(1)}(r,z)$ и $s_{zz}^{(1)}(r,z)$на верхней границе $z_1=0$ первого слоя, а затем, используя соотношения (5.7), (5.9), выразим их через трансформанту Вебера $\bar{s}(x)=\bar{s}_{zz}^{(1)}(x,0)=xa_1(x)$ нормального напряжения $s_{zz}^{(1)}(r,0)$ на верхней границе. Подставляя найденные выражения в смешанные условия (6.1),(6.2) приходим к парным интегральным уравнениям:

$$\int_0^\infty \bar{p}(x)F_n(x)G_{1,0}(x,r)dx=g_1C(r),\qquad b>r>a; \tag{6.3}$$

$$\int_0^\infty x\ \bar{p}(x)\ G_{1,0}(x,r)dx=0,\qquad r>b, \tag{6.4}$$

где $\bar{p}(x)=-\bar{s}(x)$ – нормальное давление в пространстве изображений Вебера. Функция $F_n(x)$в (6.3) характеризующая податливость верхней границы n-слойного основания в нормальном направлении имеет вид:

$$F_n(x)=\frac{P_{21}^{(n)}(x,h_n)}{P_{22}^{(n)}(x,h_n)}=-\frac{g_1(x)}{a_1(x)}. \tag{6.5}$$

Физический смысл функции податливости понятен из выражения нормального перемещения на верхней границе n-слойного основания:

$$u_z^{(1)}(r,0)=-g_1\int_0^\infty \bar{s}(x)F_n(x)G_{1,0}(x,r)dx\ . \tag{6.6}$$

Поведение функции $F_n(x)$ при $x\to\infty$ имеет существенное значение для разрешения парных уравнений. Покажем, что существует предел:

$$\lim_{x\to\infty}F_n(x)=1. \tag{6.7}$$

Для этого получим рекурентное соотношение для функции податливости. Как и в [9] «удалим» 1-й слой, тогда количество слоев основания станет равным $(n-1)$, а верхний слой теперь характеризуется индексом $k=2$. Функция податливости такого $(n-1)$-слойного основания принимает вид:

$$F_{n-1}(x)=\frac{P_{21}^{(n-1)}(x,h_{n-1})}{P_{22}^{(n-1)}(x,h_{n-1})}=-\frac{g_2(x)}{a_2(x)}. \tag{6.8}$$

Выражая начальные параметры a_2, g_2 в (6.8) через a_1, g_1 согласно (5.1), (4.7) и затем используя (6.5) легко получить рекурентную формулу:

$$F_n(x)=\frac{\Delta_1\, g_1 d_{21}^{(1)}(x,h_1)+d_{11}^{(1)}(x,h_1)F_{n-1}}{\Delta_1\, g_1 d_{22}^{(1)}(x,h_1)+d_{12}^{(1)}(x,h_1)F_{n-1}},\quad \Delta_k=\frac{g_{k+1}}{g_k}. \tag{6.9}$$

Подставляя в (6.9) $d_{ij}^{(1)}(x,h_1)$, определяемые согласно (3.8) получим:

$$F_n(x)=\frac{\Delta_1 S_1 sh\, h_1^{(1)} sh\, h_2^{(1)}+LF_{n-1}}{\Delta_1 L+S_1^{-1}PF_{n-1}}, \tag{6.10}$$

где

$$P=8x^2c^2k_1^{(1)}k_2^{(1)}\left(1-ch\, h_1^{(1)} ch\, h_2^{(1)}\right)+\left[16x^4\left(k_1^{(1)}\right)^2\left(k_2^{(1)}\right)^2+c^4\right] sh\, h_1^{(1)} sh\, h_2^{(1)},$$

$$L=4x^2k_1^{(1)}k_2^{(1)} sh\, h_1^{(1)} chh_2^{(1)}-c^2 sh\, h_2^{(1)} chh_1^{(1)},\qquad S_1=\frac{(k_2^{(1)})^2xk_1^{(1)}}{1-n_1}. \tag{6.11}$$

Разделив числитель и знаменатель (6.10) на $ch\, h_1^{(1)} ch\, h_2^{(1)}$ и переходя в полученном выражении к пределу при $x\to\infty$ получим (6.7).

7. Сведение парных уравнений к уравнению Фредгольма. Применим к парным уравнениям (6.3),(6.4) операторы преобразующие ядра преобразований Вебера $c_{1,0}(x,r)$ в тригонометрические – $\cos x(r-a)$ [11]:

$$\left(\mathsf{I}+\mathsf{K}_{1,0}^{(a)}\right)\sqrt{\frac{s}{a}}\, c_{1,0}(x,s)=\frac{2}{px\,a}\cos x(s-a),\qquad a<s<r; \tag{7.1}$$

$$\left(\mathsf{I}+\mathsf{L}_{1,0}^{(\infty)}\right)\sqrt{\frac{s}{a}}\, c_{1,0}(x,s)=\left|H_1^{(2)}(x\,a)\right|^2\cos x(s-a),\quad r<s<\infty, \tag{7.2}$$

где I – тождественный оператор, а операторы $\mathsf{K}_{1,0}^{(a)}$ и $\mathsf{L}_{1,0}^{(\infty)}$ имеют вид:

$$\mathsf{K}_{1,0}^{(a)} f(s)=\int_a^s f(r)K(r,s)dr,\qquad \mathsf{L}_{1,0}^{(\infty)} f(s)=\int_s^\infty f(r)L(r,s)dr, \tag{7.3}$$

$$K(r,s)=-\sqrt{\frac{r}{a}}\int_0^\infty\frac{I_1(xa)K_0(xr)+K_1(xa)I_0(xr)}{p^2I_1^2(xa)+K_1^2(xa)}\exp[-x(s-a)]dx, \tag{7.4}$$

$$L(r,s)=\sqrt{\frac{r}{a}}\int_0^\infty l\ ch\ l(s-a)K_1(la)K_0(lr)dl\ , \qquad l=r-a, \qquad (7.5)$$

$I_n(x),\ K_n(x)$ – модифицированные функции Бесселя.

После воздействия указанными операторами на (6.3),(6.4), парные уравнения можно привести к виду:

$$\int_0^\infty \overline{p}(x)\cos x\ l\ dx = g_1 C-\int_0^\infty \overline{p}(x)[R_n(x)-1]\cos x\ l\ dx\ , \quad 0\le l\le b\ ; \qquad (7.6)$$

$$\int_0^\infty x\ \overline{p}(x)\cos x\ l\ dx=0, \qquad b<l<\infty, \qquad (7.7)$$

где

$$R_n(x)=\frac{2}{px\ a}\left|H_1^{(2)}(x\ a)\right|^{-2}F_n(x), \quad l=r-a, \quad b=b-a. \qquad (7.9)$$

Продифференцируем (7.6) по l и воспользуемся подстановкой:

$$x\ \overline{p}(x)=g\left[\int_0^b\sqrt{s}w(s)J_0(xs)ds-\sqrt{b}\,J_0(xb)\right], \qquad (7.10)$$

где g – произвольная константа. В итоге уравнение (7.7) удовлетворяется тождественно, а (7.6) приводит к уравнению типа Абеля [12]:

$$\int_0^l\frac{\sqrt{t}w(t)dt}{\sqrt{l^2-t^2}}=D(l), \qquad 0\le l\le b\ , \qquad (7.11)$$

$$D(x)=\int_0^\infty[R_n(x)-1]\left[\sqrt{b}\,J_0(xb)-\int_0^b\sqrt{s}w(s)J_0(xs)ds\right]\sin x\ l\ dx\ . \qquad (7.12)$$

Решая уравнение (7.11), получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно функции $w(t)$:

$$w(t)+\int_0^b w(s)V(t,s)ds=V(t,b), \quad b=b-a, \qquad (7.13)$$

$$V(t,s)=\sqrt{ts}\int_0^\infty[R_n(x)-1]J_0(xt)J_0(xs)dx\ . \qquad (7.14)$$

8. Выражение НДС и механических характеристик через решение интегрального уравнения. Для задачи (1.1)-(1.4) НДС определяется согласно (5.11) посредством известных матриц (5.5), (5.10) и вычисления преобразования Вебера $\overline{C}(x)$ от заданной на поверхности $z_1 = 0$ n-слойной среды функции перемещения – $C(r)$.

Определим НДС и некоторые механические характеристики смешанной задачи (6.1), (6.2). Будем полагать, что вертикальные гармонические перемещения $C\exp(iwt)$ кольцевой области $a<r<b$ поверхности $z_1 = 0$ n-слойного пакета вызваны действием динамической силы $P\exp(iwt)$ на круговой штамп массы m с плоским основанием, расположенным соосно полости.

Нормальные напряжения и перемещения в k***-ом слое.*** Выражая матрицу $X_1(x)$ начальных параметров 1-го слоя – (5.10) через трансформанту Вебера нормального давления штампа $\overline{p}(x)=$ $=-\overline{s}(x)=-xa_1(x)$ учитывая при этом (6.5), (5.7), (5.9), получим:

$$X_1(x)=\left\| \begin{matrix} -1 \\ F_n(x) \end{matrix} \right\| \cdot \frac{\overline{p}(x)}{x}. \tag{8.1}$$

С учетом (8.1), матрица (5.11) НДС k-го слоя примет вид:

$$\left\| \begin{matrix} s_{zz}^{(k)}(r,z_k) \\ u_z^{(k)}(r,z_k) \end{matrix} \right\| = \int_0^\infty \left\| \begin{matrix} P_{11}^{(k)}(x,z_k) & P_{12}^{(k)}(x,z_k) \\ P_{21}^{(k)}(x,z_k) & P_{22}^{(k)}(x,z_k) \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} -1 \\ F_n(x) \end{matrix} \right\| \overline{p}(x) G_{1,0}(x,r)dx \ . \tag{8.2}$$

Подставляя в (8.2) $\overline{p}(x)$ из (7.10), получим НДС k-го слоя выраженное через решение $w(t)$ интегрального уравнения (7.15) и константу g. Для определения константы g умножим (7.6) на $\left(b^2 - l^2\right)^{-1/2}$ и проинтегрируем от 0 до b, используя затем (7.10) находим:

$$g = \frac{p}{2} a g_1 C/B, \qquad B = \int_0^b \sqrt{s} w(s) Y(s) ds - \sqrt{b}\, Y(b), \tag{8.3}$$

$$Y(s) = \frac{p}{2} \int_0^\infty x^{-1} R_n(x) J_0(xs) J_0(xb) dx \ . \tag{8.4}$$

Используя уравнение динамики штампа, и приравнивая значения предела $\lim\limits_{x\to 0} x\,\overline{p}(x)$ найденного из определения преобразования Вебера с одной стороны и подстановки (7.10) – с другой получим C и g:

$$C = \frac{-P}{mw^2 - p^3 a g_1 \frac{A}{2B}}, \quad g = \frac{-p\, g_1 P}{2mw^2 B - p^3 a g_1 A}, \quad A = \int_0^b \sqrt{s} w(s) ds - \sqrt{b}\ . \tag{8.5}$$

Амплитудно- и фазово-частотные характеристики колебаний штампа. Введем безразмерные величины $M=m/r\,b^3$, $p=b/a$, $\Omega=w\,b\sqrt{r/m}$ и запишем комплексную амплитуду колебаний C в виде, удобном для сравнения с результатами работы [13]:

$$C=b_{cm}K^*=b_{cm}\left|K^*\right|\exp(ij^*),\qquad b_{cm}=\frac{P(1-n)}{4mb},\tag{8.6}$$

$$K^*=\frac{4p}{(1-n)}\frac{1}{(Z-M\Omega^2p)},\qquad Z=\frac{p^3}{2(1-n)}\frac{A}{B},\qquad j^*=\arg K^*,\tag{8.7}$$

где: b_{cm}– смещение при статическом воздействии силой P, K^*– комплексный коэффициент динамичности, j^*– разность фаз между колебаниями штампа и действующей силой.

Нетрудно видеть, что C и g в (8.5) зависят от частоты воздействия т.к. A и B в (8.7) выражаются через функцию $Y(s)$– (8.4) и решение $w(s)$ интегрального уравнения (7.15) с ядром $V(t,s)$– (7.16), содержащих функцию податливости $F_n(x)$. Последняя зависит от волновых чисел $k_{1,2}^{(1)}$, связанных с Ω: $k_2^{(1)}=\Omega/b$, $k_1^{(1)}=k_2^{(1)}\sqrt{(1-2n)/2(1-n)}$. Таким образом, решение интегрального уравнения (7.15) для различных Ω позволяет определить аплитудно-частотные $-\left|K^*(\Omega)\right|$и фазово-частотные $-j^*(\Omega)$ характеристики колебаний штампа на n-слойном упругом основании с шахтным стволом при различных M и n .

Контактные напряжения под штампом. Представим нормальное напряжение на границе $z_1=0$ через его преобразование Вебера:

$$s_z(r)=\int_0^\infty x\,\bar{s}(x)\,G_{1,0}(x,r)dx\,.\tag{8.8}$$

Воспользуемся оператором [11]:

$$\left(\mathsf{I}+\mathsf{K}_{1,0}^{(\infty)}\right)\cos x(r-a)=\sqrt{\frac{r}{a}}\,c_{1,0}(x,r)\left|H_1^{(2)}(xa)\right|^{-2},\qquad r\in(a,\infty)\tag{8.9}$$

В (8.9) I – тождественный оператор, а оператор $\mathsf{K}_{1,0}^{(\infty)}$ имеет вид:

$$\mathsf{K}_{1,0}^{(\infty)}f(r)=\int_r^\infty f(s)K(r,s)ds\,,\tag{8.10}$$

и его ядро $K(r,s)$ определяется выражением (7.4). Используя (8.9), выражение (8.8) для $s_z(r)$ можно представить в виде:

$$\sqrt{\frac{r}{a}}\, s_{z}(r)=\left(\mathrm{I}+\mathrm{K}_{1,0}^{(\infty)}\right)\int_{0}^{\infty} x\,\bar{s}(x)\cos x(r-a)\,dx\,. \qquad (8.11)$$

При получении выражения (8.11) был изменен порядок интегрирования и воздействия оператора (8.9).

Представим $x\,\bar{s}(x)$ через косинус-преобразование Фурье $\bar{j}^{\,c}(x)$ некоторой функции $j(t)$:

$$x\,\bar{s}(x)=\bar{j}^{\,c}(x)=\frac{2}{p}\int_{0}^{\infty}\begin{pmatrix} j(t), & 0<t\le b\,; \\ 0, & t>b\,. \end{pmatrix}\cos x\,t\,dt. \qquad (8.12)$$

Обращая (8.12), получим:

$$j(t)=\int_{0}^{\infty} x\,\bar{s}(x)\cos x\,t\,dx\,. \qquad (8.13)$$

В силу (8.13) и (8.10), выражение (8.11) можно записать в виде:

$$\sqrt{\frac{r}{a}}\, s_{z}(r)=j(r-a)+\int_{r}^{b} j(x-a)K(r,x)\,dx, \qquad (8.14)$$

где функция $j(t)$ выраженная через решение $w(t)$ имеет вид:

$$j(t)=g\left[\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b^{2}-t^{2}}}-\int_{0}^{b}\frac{\sqrt{s}\,w(s)\,ds}{\sqrt{s^{2}-t^{2}}}\right]. \qquad (8.15)$$

Здесь g – коэффициент концентрации напряжений. Приведенный выше способ выражения контактных напряжений использовался в [14].

9. Вопрос единственности решения и частные случаи смешанной задачи. Полученное в пунктах **6-8** решение смешанной задачи имеет формальный характер. Для обеспечения единственности ее решения, необходимо выбрать ветви радикалов $k_{1,2}^{(k)}=\sqrt{x^{2}-[k_{1,2}^{(k)}]^{2}}$ и указать способ вычисления интегрального ядра $V(t,s)$ и интеграла $Y(s)$.

Наиболее просто выбрать ветви $k_{1,2}^{(k)}$ переходя к частным случаям данной задачи. Полагая в (6.10) $n=1$, $h\to\infty$, приходим к смешанной задаче для упругого полупространства с полостью [4,5]:

$$F_{1}(x)=\frac{k_{2}^{2}x\,k_{1}}{(n-1)}\frac{1}{l(x)}, \qquad l(x)=\left(2x^{2}-k_{2}^{2}\right)^{2}-4x^{2}k_{1}k_{2}. \qquad (9.1)$$

Здесь полюсом функции податливости $F_1(x)$ является вещественный (рэлеевский) корень дисперсионного соотношения Рэлея $l(x)=0$. Для такой задачи волны в полупространстве распространяются от источника (штампа) и затухают на бесконечности при следующем выборе ветвей [4,5]:

$$\operatorname{Re} k_j(x)>0,\ x>k_j;\quad \operatorname{Jm} k_j(x)>0,\quad k_j>x>0;\quad j=1,2 \qquad (9.2)$$

Такой же выбор ветвей осуществлялся и в динамической контактной задаче для слоя с полостью, рассмотренной в работе [6]. Заметим, что случай одного слоя конечной толщины непосредственно следует из (6.10) при $n=1$. Действительно, так как для абсолютно жесткого полупространства функция податливости тождественно равна нулю $F_0(x)\equiv 0$, то из (6.10) получаем:

$$F_1(x)=\frac{k_2^2 x k_1}{(n-1)}\frac{1}{G(x)},\ G(x)=\left(2x^2-k_2^2\right)^2 shh_2 chh_1-4x^2k_1k_2 shh_1 chh_2 \qquad (9.3)$$

и тогда полюсами подынтегральной функции $F_1(x)$ являются корни известного дисперсионного соотношения Рэлея-Лэмба [1,2].

Полагая в (6.10) $n=2$, $h_2\to\infty$, получим функцию податливости для слоя на упругом полупространстве:

$$F_{2/\infty}(x)=\frac{\Delta_1 S_1 sh\, h_1^{(1)} sh\, h_2^{(1)}+LF_1}{\Delta_1 L+S_1^{-1}PF_1},\quad F_1(x)=\frac{[k_2^{(2)}]^2 x k_1^{(2)}}{(n_2-1)}\frac{1}{l^{(2)}(x)},\ (9.4)$$

где $F_1(x)$-функция податливости полупространства с параметрами среды имеющими индекс 2 (т.к. отсчет слоев начинается с верхнего). Заметим, что переходя в выражении (9.4) для $F_{2/\infty}(x)$ к пределу при $k_{1,2}^{(1)}\to 0$, $k_{1,2}^{(2)}\to 0$, получим функцию податливости слоя на полупространстве в случае статики [9]:

$$F_{2/\infty}^{\text{стат}}=\frac{sh(2xh_1)+2xh_1+\Delta_1[ch(2xh_1)-1]}{ch(2xh_1)-2x^2h_1^2-1+\Delta_1[sh(2xh_1)+2xh_1]}. \qquad (9.5)$$

Естественно перенести указанный выбор ветвей радикалов $k_{1,2}^{(k)}$ на случай многослойного основания с функцией податливости $F_n(x)$– (6.10). Для отыскания полюсов этой функции необходимо найти корни соответствующего дисперсионного соотношения:

$$G(x,k_{1,2})=\Delta_1 L+S_1^{-1}PF_{n-1}=0. \qquad (9.6)$$

Как и в задачах для полупространства и слоя с цилиндрической полостью [4-6] для вычисления интегралов $V(t,s)$, $Y(s)$в конкретной задаче (с заданным числом слоев) используется метод контурного интегрирования в комплексной плоскости. Для этого подынтегральные выражения представляются в виде функций комплексной переменной $z = x + ih$, определенных на 4-х листной римановой поверхности. Построение римановой поверхности, и соответствующая техника интегрирования описана в [2,4-6,17].

Для большей четкости и наглядности при проведении контуров интегрирования и разрезов, а также для получения физичных решений, зависящих от пути обхода полюсов подынтегральных функций, согласно принципу предельного поглощения [2,17] вводится малое затухание в среду[1] $0 < k' << k_{1,2}^{(i)}$, в силу чего вещественные волновые числа $k_{1,2}^{(i)}$ заменяются комплексными: $\tilde{k}_{1,2}^{(i)} = k_{1,2}^{(i)} - i\,k'$.

Остановимся здесь подробнее на способе учета вклада полюсов функции $F_n(x)$ при контурном интегрировании. С этой целью проанализируем дисперсионное соотношение $G(x, k_{1,2}) = 0$. Следуя обозначениям принятым в [2], введем безразмерные волновые числа и частоты соответственно:

$$\bar{x} = \frac{2}{p} x\, h, \qquad \bar{\Omega} = \frac{2}{p} k_2\, h. \tag{9.7}$$

Тогда дисперсионное соотношение (9.6) можно рассматривать как функцию двух переменных – $G(\bar{x}, \bar{\Omega}) = 0$.

В силу введения малого затухания в среду вещественные частоты $\bar{\Omega}$ заменяются комплексными: $\tilde{\Omega} = \bar{\Omega} - i\Omega'$, $(\Omega' = \frac{2}{p} hk' > 0)$, а вещественный корень $\bar{x}$ дисперсионного уравнения сместится в комплексную плоскость $z = \bar{x} + ih$. При этом возмущенное дисперсионное уравнение принимает вид:

$$G(\bar{x} + ih, \bar{\Omega} - i\Omega') = 0. \tag{9.8}$$

Для выяснения направления смещения вещественного корня $\bar{x}$ определим знак мнимой части h комплексного корня z уравнения (9.8).

Для областей, $\tilde{\Omega}$ и z, в которых $G(z, \tilde{\Omega}) = 0$– однозначная аналитическая функция и $\partial G / \partial z \neq 0$, на основании подготовительной

[1] Выбранный здесь знак мнимой добавки k' при временной зависимости $\exp(iwt)$ обеспечивает убывание решений уравнения движения упругой среды при $r \to \infty$

теоремы Вейерштрасса и теоремы о неявных функциях [1,15] решением уравнения (9.8) является единственный корень $z = z(\overset{\prime}{\Omega})$, представляющий однозначную аналитическую функцию в указанных областях:

$$\bar{x} + ih = f(\bar{\Omega} - i\Omega'). \tag{9.10}$$

Как известно, в случае одного слоя существуют дисперсионные кривые, для которых групповая скорость $c_g = d\bar{\Omega}/d\bar{x}$ проходя через некоторую точку $(\bar{x}^*, \bar{\Omega}^*)$ меняет свой знак, а в самой точке обращается в нуль, так что, на определенном интервале частот предполагаемая явной зависимость $z = z(\overset{\prime}{\Omega})$ является двузначной. В такой точке дисперсионное уравнение имеет двукратный корень[2] [1] и условие $\partial G/\partial z \neq 0$, теоремы о неявных функциях, нарушается. Однако и в случае двукратных нулей дисперсионного уравнения ($\partial G/\partial z = 0$, $\partial^2 G/\partial z^2 \neq 0$), используя подготовительную теорему Вейерштрасса и теорему о неявных функциях, можно указать однозначные аналитические ветви функции $z = z(\overset{\prime}{\Omega})$, для которых $(\bar{x}^*, \bar{\Omega}^*)$ – алгебраическая точка ветвления [15]. Таким образом (9.10) имеет место и в окрестности частотных минимумов дисперсионной кривой.

Из (9.10) в силу условия Коши-Римана следует $\partial\bar{x}/\partial\bar{\Omega} = \partial h/\partial(-\Omega')$ откуда после интегрирования по Ω' имеем: $h = -\int_0^{\Omega'} \frac{\partial\bar{x}}{\partial\bar{\Omega}} \partial\Omega'$. Разлагая полученный интеграл в ряд Тейлора по малым $\Omega' > 0$, находим: $h(\Omega') = -\Omega' \cdot \partial\bar{x}/\partial\bar{\Omega}\big|_{\Omega'=0} + O(\Omega'^2)$, откуда следует $\operatorname{sgn}(-h) = \operatorname{sgn}(\partial\bar{x}/\partial\bar{\Omega})\big|_{\Omega'=0}$. Если представить записанное выше условие Коши-Римана в виде, $\partial\bar{x}/\partial\bar{\Omega} = -\partial h/\partial\Omega' = -Jm(\partial z/\partial\Omega')$, то $\operatorname{sgn} h = \operatorname{sgn}\left[Jm(\partial z/\partial\Omega')\big|_{\Omega'=0}\right]$. Разлагая уравнение (9.8) в окрестности вещественного нуля в ряд Тейлора, получим: $\left.\frac{\partial z}{\partial\Omega'}\right|_{\substack{z=\bar{x}\\ \Omega'=0}} = -\left.\frac{G'_{\Omega'}}{G'_z}\right|_{\substack{z=\bar{x}\\ \Omega'=0}}$.

Отделяя в последнем выражении мнимую часть и учитывая, что $\left|G'_z\right|^{-2} > 0$ при $\Omega' = 0$, приходим к условию определения знака h:

$$\operatorname{sgn}(-h) = \operatorname{sgn}\left[\operatorname{Re} G'_{\Omega'} \operatorname{Jm} G'_z - \operatorname{Re} G'_z \operatorname{Jm} G'_{\Omega'}\right]\Big|_{\substack{z=\bar{x}\\ \Omega'=0}}. \tag{9.11}$$

[2] Можно показать, что в такой точке имеет место условие: $\partial G/\partial z = 0$.

Далее находим, аналитически, производные $G'_{\Omega'}, G'_z$ в некоторой точке $(\Omega = \Omega_0,\ z = z_0)$, удовлетворяющей уравнению (9.8) в комплексной области и полагаем в них затем $\Omega' = 0$, а следовательно $\Omega_0 = \overline{\Omega}_0$ и $z = \overline{x}_0$. Подставляя найденные значения производных в (9.11) и вычисляя его правую часть при известных вещественных корнях $\overline{\Omega}_0, \overline{x}_0$, не решая дисперсионное уравнение в комплексной области, мы определим направление смещения вещественного нуля $z = \overline{x}_0$. При этом, вещественную частоту $\overline{\Omega}_0$ мы задаем, а вещественный нуль $\overline{x}_0$ находим решая дисперсионное уравнение $G(\overline{\Omega}_0, \overline{x}_0) = 0$ в вещественной области.

Используя теорему об обратной функции [16] можно показать, что знаки h и групповой скорости c_g – противоположны.

Указанный выше алгоритм вычисления ядра $V(t,s)$ обеспечивает единственность и эффективность решения интегрального уравнения (7.13), которое можно реализовать численно, например, методом квадратур.

Приведенные здесь решения основной и смешанной задачи для многослойного упругого основания с вертикальной скважиной можно использовать при динамических расчетах сооружений и фундаментов на основаниях с шахтным стволом, для оценки несущей способности основания, в условиях динамических воздействий, для создания сейсмозащиты сооружений, при расчете деталей машин, в вопросах бурения и эксплуатации скважин и других задачах геомеханики.

А.Р.Сніцер **Динаміка багатошарового пружного середовища з циліндричною порожниною.**

Р Е З Ю М Е . Розглядається основна і змішана задача про коливання багатошарового пружного середовища з циліндричною порожниною при гармонійному навантаженні поверхні. Для рішення задачи використовуються інтегральні перетворення Вебера і метод початкових параметрів. У випадку змішаних умов на поверхні задача формулюється у виді парних інтегральних рівнянь, яки зводяться до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Розглядається питання єдиності розв’язку задачи, вказані алгоритми числової реалізації.

A.R. Snitser **Dynamics of the Multilayer Elastic Medium with Cylindrical Cavity.**

S U M M A R Y . We study basic boundary value and mixed boundary value problems on oscillation of multilayer elastic medium containing a vertical cylindrical cavity when exisimmetric harmonic displacement or stress disposed to the upper layer. Integral Weber transform and the method of Initial parameters are used for the solution of the problem. In the case of mixed boundary value conditions on the external surface the problem is formulated in the form of Dual integral equations which are reduced to the Fredgolm equation of the second kind. The problem of the only possible solution is discussed and algorithms for numerical implementation of the problem are exhibited.

Список использованной литературы

1. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей.-М.:Наука, 1979.-320с.
2. Гринченко В.Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.- Киев: Наук. думка, 1978.- 264 с.
3. Губенко В.С., Киселёв М.Я., Ламзюк В.Д., Приварников А.К. К теории динамических задач для многослойных оснований// Докл. АН УССР.-1977.-Сер. А, N 4.-С. 331-334.
4. Малиц П.Я., Сницер А.Р. Вертикальные колебания кругового штампа на упругом полупространстве с цилиндрической полостью// Динам. системы.– 1989.–Вып. 8.– С. 30-36.– Киев:Выща школа, 1989.
5. Malits P.Ya., Snitser A.R. Vertical Oscillations of aCircular Die on an Elastic Half-Space with a Cylindrical Cavity // Journal of Soviet Mathematics.–1993.– Vol.65, No 3.– P.1629-1634.
6. Сницер А.Р. Некоторые задачи установившихся колебаний полупространства и слоя с цилиндрической полостью //Автореферат диссертации на соиск. учен. степени к.ф.-м.н.,Днепропетровск,1990.–16 с.
7. Титчмарш Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т.1. - М.: Изд-во иностр. лит., 1960. -278 с.
8. Дидкин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление -М.:Наука, 1974.-544с.
9. Петришин В.И., Приварников А.К., Шевляков Ю.А. К решению задач для многослойных оснований// Известия АН СССР. Механика.-1965.-N 2.-С.138-143.
10. Шевляков Ю. А. Матричные алгоритмы в теории упругости неоднородных сред. К.: Одесса, 1977. 216 с.
11. Малиц П. Я. О некоторых операторах преобразования и их приложении к контактной задаче для слоя с полостью// Симф.ГУ.-Симферополь, 1988.-8 с.-(Деп. в Укр.НИИНТИ 12.09.88; N 2321-Ук88).
12. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.:Наука, 1977.-640с.
13. Бородачев Н.М. Динамическая контактная задача для штампа с плоским круговым основанием, лежащего на упругом полупространстве// Изв. АН СССР. Механика и машиностроение.-1964.-N 2.-С. 82-90.
14. Малиц П. Я., Сницер А. Р. Крутильные колебания кругового штампа на упругом полупространстве и слое с цилиндрической полостью// СимфГУ. – Симферополь, 1989 – 36 с. – (Деп. в Укр. НИИНТИ 26.05.89; № 1403-Ук89).
15. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Т.1.-М.:Наука, 1967.-488с.
16. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексной переменной.-М.: Наука, 1982.-488с.
17. Митра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. -М.: Мир, 1974.-324 с.

Поступила в редколлегию 12.04.03