Список использованной литературы

1. Аминов А.Б., Сиразетдинов Т.К. Условия знакоопределенности четных форм и устойчивость в целом нелинейных однородных систем // ПММ. 1984. Вып. 3. С. 339-347.
2. Степанов А.В. Критерий знакоопределенности однородных полиномов в конусе // ПММ. 1992. Вып. 4. С. 676-679.
3. Персидский С.К. К вопросу об абсолютной устойчивости // Автоматика и телемеханика. 1969. № 12. С. 5-11.
4. Pick G. Geometrisches zur Zahlenlehre.- Z.d.Verienes Lotos, Praga,1899.
5. Курош А.Г. Курс высшей алгебры .- М.: Наука, 1968,- 432 с.
6. Годунов С.К. Квадратичные функции Ляпунова // Учебное пособие. Изд-во НГУ. Новосибирск, 1982. -80 с.
7. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. - М.: Физматгиз, 1962.- 366 с.

Поступила в редколлегию 06.05.03

УДК 518:517.948

П.С. СЕНЬО, канд. физ.-мат.наук, Львовский национальный университет им. И. Франко

ПРЯМЫЕ ИНТЕРВАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ И ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

На основе построения интервальных расширений решения вариационной задачи и остаточного члена квадратурной формулы задача сводится к минимизации интервальнозначной функции. Доказана теорема, выполнение условий которой гарантирует получение интервалов, содержащих решение начальной задачи. Предложены алгоритмы решения задачи в замкнутом виде, которые автоматически учитывают все виды погрешностей. Для решения системы нелинейных уравнений, к которой сведена p – система задачи оптимального управления, предлагается применять интервальный аналог метода Ньютона.

При решении вариационных задач и задач оптимального управления необходимо находить экстремумы некоторых функционалов зависящих от одной или нескольких переменных при разных ограничениях. Например, (см. [1]) два полупространства 1 и 2 сжимаются распределенной силой $q(t)$, и подпространство 1 скользит со скоростью $v(t)$ по полупространству 2. Нужно найти закон распределения сжимающей силы, при котором изнашивание будет минимальным; температура на границе полупространств не превысит заданных критических значений; процесс торможения состоится за минимальное время. Итак, если T- время, на протяжении которого движение прекратится, то нужно найти такую функцию $q(t)$, при которой функционал $J=\int\limits_0^T v(t)\,(k_1+k_2\,t(t,q(t),v(t)))\,q(t)\,dt$ принимает наименьшее значение, где $v(t)=v_0-\frac{f}{m}\int\limits_0^t q(x)dx$, $q(0)=0, v(t)=0$, $t(t,q(t),v(t))\equiv c_1\cdot v(t)\cdot q(t)\cdot u(t)$, $u(t)$ – известная функция; c_1, k_1, k_2, f, m, v_0 - известные константы [1]; ограничения на критическую температуру - $t_i(t,q(t),v(t))\le \bar{k}_i$ $(i=1,2)$.

Применение интервальной математики для решения таких задач принципиально не отличается для разных их классов. Поэтому будем рассматривать простейшую задачу вариационного исчисления

$$J(x)=\int\limits_a^b f(t,x(t),x'(t))dt\to\min \tag{1}$$

$$\text{при } x(a)=x_a,\ x(b)=x_b. \tag{2}$$

Прямые методы решения вариационных задач, как правило, состоят в переходе к некоторым эквивалентным задачам на экстремум функции многих переменных. Тогда

$$J(x)=\int\limits_a^b f(t,x(t),x'(t))dt=\sum_{i=0}^{n-1}(g(x_i,x_{i+1})+r_i)+R_n(r_x), \tag{3}$$

где функция $g(x,y)$ определяется видом функции $f\left(t,x(t),x'(t)\right)$, примененной квадратурной формулой, выбором аппроксимации производной $x'(t)$ в узлах квадратурной формулы; r_i, r_x -ошибки аппроксимации соответственно в узлах квадратурной формулы и в промежуточной точке остаточного члена $R_n(r_x)$ этой квадратуры. Пренебрегая величинами r_i, r_x и остаточным членом $R_n(r_x)$, решение задачи $\sum\limits_{i=0}^{n-1}g(x_i,x_{i+1})\to\min$, $x_0=x_a, x_n=x_b$ считают решением задачи (1), (2) в узлах t_i $(i=0,1,2,...,n)$. Все такие методы решают лишь задачи близкие к (1), (2) и поэтому необходимо ещё дополнительно исследовать устойчивость каждого из них.

Прямые интервальные методы решения вариационных задач с использованием квадратурных формул состоят в сведении таких задач к задаче минимизации соответствующей интервальнозначной функции многих переменных путём построения достаточно узких интервальных расширений производных искомой функции $x(t)$ и её остаточного члена $R_n(r_x)$ между смежными узлами квадратуры. Так построенную задачу далее решаем соответствующими методами интервального анализа.

При решении задачи (1), (2) методами интервального анализа строим интервальный сплайн [4], степень которого определяется порядком старшей производной функции $x(t)$, входящей в остаточный член соответствующей квадратурной формулы. Учитывая это, целесообразно использовать в (3) квадратурные формулы прямоугольников или трапеций, требующие построения кубических сплайнов. Это существенно упрощает вид функции, которую нужно минимизировать, и уменьшает объём вычислений.

Пусть

$$\int_a^b F(t)dt \equiv \int_a^b f(t, x(t), x'(t))dt = \sum_{i=0}^{n} c_i F(t_i) + R_n \qquad (4)$$

где $R_n = c_n F^{(k)}(x), \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$, c_i- коэффициенты соответствующей квадратурной формулы; $\overline{R}_n$- некоторое интервальное оценивание на промежутке $[a,b]$ остаточного члена R_n. Тогда $\int_a^b F(t)dt \subset \sum_{i=0}^{n} c_i F(t_i) + \overline{R}_n$. Пусть для определённости формула (4) является квадратурной формулой трапеций, т.е.,

$$c_0 = c_n = 1, c_1 = c_2 = ... = c_{n-1} = 2,$$

$$R_n = h^3(\sum_{i=1}^{n} F''(x_i))/12 = (b-a)^3 F''(h)/(12n^2),\ h_1 = h_2 = ... = h_n = h,$$

где $x_i \in (t_{i-1}, t_i), h \in [a,b]$. Учитывая определение функции $F(t)$, имеем:

$$\begin{aligned} F''(t) = \frac{d}{dt} f_t' + \frac{d}{dt}(f_x' x') + \frac{d}{dt}(f_{x'}' x'') = f_{tt}'' + (f_{xt}'' + f_{xx}'' x')x' + 2 f_{xx'}'' x' x'' + \\ + f_x' x'' + \left(f_{tx'}'' + f_{x'x'}'' x''\right)x'' + f_{x'}' x'' \end{aligned}, \qquad (5)$$

где

$$f_{z_i}' = \frac{\partial}{\partial z_i} f(z_1, z_2, z_3),\ f_{z_i z_j}'' = \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} f(z_1, z_2, z_3), (i, j = 1,2,3).$$

Вычислим согласно методике, описанной в [4], на каждом интервале T_i интервальные расширения $x_i^{(j)}$ $(j = 1,2,3)$. Интервальное оценивание для остаточного члена R_n будем осуществлять в форме

$R_n = h^3\left(\sum_{i=1}^{n} F''(x_i)\right)/12$, так как при этом интервальное оценивание на всем промежутке $[a,b]$ является объединением интервальных оцениваний соответствующих функций на узких интервалах T_i, где отклонение их от $W(F'',T_i)$ (см. [2]) незначительное. Это минимизирует интервальное оценивание остаточного члена R_n. Подставим в (5) вместо $x_i, x(x_i), x'(x_i)$ соответственно интервалы T_i, X_i, X_i', где x_i, x_i' - интервальные оценивания функций $x(t), x'(t)$ на интервалах T_i, и все действия заменим на соответствующие действия над интервалами. В результате получим интервал $\overline{R}_n \supseteq R_n$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Если решение* $x(t)$ *задачи (1-2) трижды непрерывно дифференцируемо на промежутке* $[a,b]$, *то* $x(t_i) \subseteq X_i$, *где* X_i $(i = 0,1,\ldots,n)$ *- решение задачи* $\sum_{i=0}^{n} c_i f(t_i, x_i, s_i') + \overline{R}_n \to \min$, s_i'*- интервальные расширения в узлах квадратурной формулы производной сплайна, построенного по методике из* [4].

Полученную задачу можно решить так. Пусть функция $F(x): A \in R \to I$ интервальнозначная. Её можно интерпретировать как совокупность всевозможных функций, заданных на интервале A, область значений которых содержится в области значений функции $F(x)$. Очевидно, что $F(x_1) < F(x_2)$, если $f(x_1) < f(x_2)$ для всякой $f(x) \in F(x)$. Поэтому локальным минимумом интервальнозначной функции будем называть интервал, на котором каждая $f(x) \in F(x)$ имеет локальный минимум. Графически данная ситуация изображена на рисунке 1.

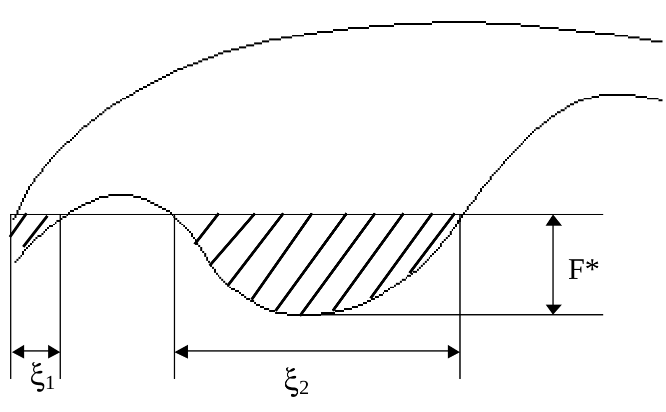

Рис. 1

Глобальным минимумом интервальнозначной функции называем интервал, на котором содержатся глобальные минимумы всех $f(x)\in F(x)$. Иными словами, если $F(x): A\in R \to I$ (или $F(x): A\in I \to I$), то $\min\limits_{x\in A} F(x)=\bigcup\limits_{i=1}^{n} F(x)$, где $x_i \subset A$, $\Omega=\bigcup\limits_{i=1}^{n} x_i$. Здесь x_u такие, что для всякой $f(x)\in F(x)$ имеет место включение $\arg\min\limits_{x\in A} f(x)\in\Omega$.

Если заданная некоторая интервальнозначная функция $F(x)=[\underline{k(x)},\overline{k(x)}]$, $x\hat{I}A$, $\underline{k(x)},\overline{k(x)}: R\to R$ то интервалы x_u можно найти так. Пусть $h=\min\overline{k(x)}$, Тогда $x_i \subset A$ это те интервалы, на которых $\underline{k(x)}\le h, x\in x_i$, причем $\min\limits_{x\in A} F(x)=[\min\limits_{x\in A}\underline{k(x)},\min\limits_{x\in A}\overline{k(x)}]$. На рис. 1 интервал F^* является минимумом данной функции, а x_u – интервалы, на которых этот минимум достигается. Поэтому минимум интервальнозначной функции можно найти так. Находим минимальное значение верхней и нижней границы интервала $F(x)$. Далее ищем такой отрезок (или отрезки), на котором нижняя граница меньше или равна минимальному значению верхней границы.

Однако можно предложить алгоритм, не требующий минимизации функций $\underline{k(x)},\overline{k(x)}$, что существенно уменьшает объём вычислений. Он особенно эффективный в том случае, когда эти функции не дифференцируемы.

Пусть $X^*=\{X_1,\cdots,X_m\}$ - множество интервалов, на котором достигается решение данной задачи, а F^*- её решение. Тогда их вычисляем согласно следующего алгоритма:

1. из множества X^* выбираем интервал X_j наибольшей ширины;
2. интервал X_j делим пополам и ими заменяем интервал X^* ;
3. из множества X^* выбрасываем те интервалы, для которых существует хотя один интервал X_j из того самого множества, для которого $F(X_i) \ge F(X_j)$ в смысле выше введенного определения;
4. если был изъят хотя бы один элемент из данного множества, то переходим на 5), иначе – на 6);
5. в множестве X* объединяем интервалы, которые пересекаются;
6. если все интервалы множества X* удовлетворяют некоторому условию остановки метода (например $\omega(X_i) \le \varepsilon$), то – «конец алгоритма», иначе переходим на 1).

В результате получаем множество X^*, состоящее из интервалов, содержащих решение. Величину $F*$ получаем объединением значений функции на интервалах множества $X*$, т.е.

$$F* = \bigcup_{X_i \in X*} F(X_i).$$

В [3] такой методикой решена задача из [1], приведенная выше.

Пусть на траектории управляемой системы

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u),\ 0 \le t \le T,\ x(0) = x_0;\ x(t) \in U \tag{6}$$

нужно минимизировать по $u(\cdot)$ функционал

$$F_0(u(\cdot)) \equiv \int_0^T \Phi^0(x(t),u(t))dt, \tag{7}$$

при ограничениях

$$F_i(u(\cdot)) \cong \int_0^T \Phi^i(x(t),u(t))dt \quad i = 1,2,...,m \tag{8}$$

Решение задачи (6-8) эквивалентно решению π- системы ([5]):

$$\text{I.} \quad \dot{x} = f(x,u), \quad \text{II.} \quad -\dot{y} = f_x^*(x,u)y + \sum_{i=0}^m g_i \Phi_x^i(x,u),$$

$$\text{III.} \quad H(x(t),y(t),u(t)) = \max_{u \in U} H(x(t),y(t),u), \tag{9}$$

при условиях

$$\text{I.} \quad x(0) = x_0 \quad (\Gamma(x) = 0), \qquad \text{II.} \quad y(t) = 0 \quad (\Gamma_x^* y = 0),$$

$$\text{III.} \quad F_i(u(\cdot)) = 0 \quad i = 1,2,...,m, \tag{10}$$

где

$$H(x,y,u) \equiv \sum_{i=0}^m g_i \Phi^i(x,u) + (f(x,u),y).$$

Пусть $x = (y_1(0),...,y_n(0), g_1,..., g_m(0))$ - вектор искомых параметров. Задача (9) с таким начальным условием превращается в задачу Коши. Интегрируя ее, определим $x(t), y(t), u(t)$ а, следовательно, и $y(T)$, $F_i(u(\cdot))$. В результате получим неявную зависимость $z = Z(x)$, где $z = (y_1(T),...,y_n(T), F_1(u(\cdot)),...,.F_m(u(\cdot)))$. Итак, решение задачи (9-10) эквивалентно решению системы нелинейных уравнений $Z(x) = 0$. Точечные методы для решения этой системы, вообще говоря, применить невозможно, известные интервальные методы – также. Однако, применив методику получения интервального оценивания производной $Z'(x)$ по схеме, приведенной в [4], эту систему можно решить интервальным аналогом метода Ньютона [2]. При этом на каждом шаге задачи (9, I), (9, III) решаем соответствующими интервальными методами [2,6].

П.С. Сеньо **Прямі інтервальні методи розв'язування варіаційних задач і задач оптимального управління.**

Р Е З Ю М Е . На основі побудови інтервальних розширень розв'язку варіаційної задачі і залишкового члена квадратурної формули задача зводиться до мінімізації інтервальнозначної функції. Доведено теорему, виконання умов якої гарантує одержання інтервалів, що містять розв'язок початкової задачі. Запропоновано алгоритми розв'язання задачі в замкнутому виді, які автоматично враховують усі види похибок. Для розв'язування системи нелінійних рівнянь, до якої зведена p - система задачі оптимального керування, пропонується застосовувати інтервальний аналог методу Ньютона .

P.S. Senio **Direct interval means of the solution of variational problems and problems of the optimal comtrol**

SUMMARY. On the basis of the interval extension of the solution of a variational problem and a remnant member of the square formula, the problem comes to the minimization of the interval-pointed function. The fulfillment of the proved theory's conditions guarantees the receiving of intervals, which include the solution of an initial problem. The suggested algorithms of the problem's solution in the enclosing form, which cover automatically all kinds of errors, which arise during the solution of this problem by the point methods. For the solution of the p - system of the problem of the optimal direction is pointed to, an interval analogue of the Newton method of the solution of the non-obviously given non-linear systems of equations is suggested.

Список использованной литературы

1. Баран В.П., Вардзаль А.Г., Онышкевич В.М. И др. Квазистатичесая контактная задача термоупругости для двоих полубесконечных тел с учетом теплообразования на границе раздела //Соврем. пробл. теории контакт. взаимодействий,- Ереван, 1988.- с.24-27.
2. Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. - Новосибирск: Наука, 1986.-224 с.
3. Сеньо П.С. Метод розв'язування одного класу варіаційних задач // Вісник Львівського університету. - 1995.- серія мех..-мат. - вип. 42.- с.79-81.
4. Сеньо П.С. Розв'язування варіаційних задач та задач оптимального управління методами інтервального аналізу // Праці міжнародної конференції з управління "Автоматика - 2000".- 2000.- т.1.- с.231-235.
5. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления - М.: Наука, 1978.- 486 с.
6. Bauch, Jahn, Oelschlägel, Süsse, Wiebigke Intervallmathematik- Theorie und Anwendungen - BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1987.-245 s.

Поступила в редколлегию 10.04.03