

УДК 531/534:57

И.Т. СЕЛЕЗОВ, д-р физ.-мат. наук, Ин-т гидромеханики НАН Украины,
О.В. ЗВОНАРЕВА, асс., Транспортный ун-т.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИМПУЛЬСА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ С ЖИДКОСТЬЮ ПРИ НАЛИЧИИ ЗАКУПОРКИ

Исследуется распространение неустановившейся волны от торца в полубесконечной цилиндрической оболочке при наличии в оболочке на некотором удалении закупорки. Предполагается, что материал оболочки – вязкоупругий, жидкость – вязкая. Движение оболочки описывается теорией Кирхгофа–Лява, движение жидкости – уравнениями, осредненными по поперечному сечению. Задача решается преобразованием Лапласа по времени с последующим численным обращением. Проводится анализ численных результатов для давления и радиального перемещения оболочки при наличии закупорки.

Распространение гидроупругих волн в цилиндрической оболочке, заполненной жидкостью, представляет большой научный и прикладной интерес как в инженерных приложениях, так и в гидродинамике. И не случайно эта проблема была предметом многочисленных исследований [2-4,6,9-11], в частности, отметим [12], где приведена обширная литература, характеризующая состояние проблемы.

Ранее были рассмотрены задачи для полубесконечной однородной оболочки [5, 14]. Рассматриваемая здесь задача существенно усложняется из-за наличия закупорки в оболочке на расстоянии $x=x_0$ от начала приложения импульса давления в сечении $x=0$, что моделирует ситуацию в кровеносном сосуде с тромбом.

Постановка задачи. Движение оболочки описывается уравнениями теории оболочек Кирхгофа–Лява с учетом вязкоупругих свойств согласно модели Кельвина–Фойгта. Различные применяемые модели вязкоупругости представлены в [13]. В случае осесимметричных колебаний математическая постановка задачи представляется в виде:

дифференциальные уравнения движения оболочки

$$L_1 \bar{u}_x + L_2 \bar{u}_r = -\frac{4k_0}{\text{Re}} \bar{v}, \quad (1)$$

$$L_3 \bar{u}_x + L_4 \bar{u}_r = -k_0 \bar{p}; \quad (2)$$

дифференциальные уравнения движения жидкости [1]

$$\frac{\mathcal{I}\bar{v}}{\mathcal{I}t} + \frac{\mathcal{I}\bar{p}}{\mathcal{I}x} = -\frac{8}{\text{Re}} \bar{v}, \quad (3)$$

$$a \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = 0; \quad (4)$$

граничные условия на торце ($\bar{x}=0$)

$$\begin{aligned} \bar{u}_r(t, \bar{x}) \Big|_{\bar{x}=0} = \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} \Big|_{\bar{x}=0} = \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial x^2} \Big|_{\bar{x}=0} = 0, \\ \bar{p}(t, \bar{x}) \Big|_{\bar{x}=0} = f(t), \end{aligned} \quad (5)$$

граничные условия в сечении закупорки ($\bar{x}=\bar{x}_0$)

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_0} = \bar{v}_2 \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_0} = 0, \quad \bar{p}_1 \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_0} = \bar{p}_2 \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_0} \\ \bar{u}_{r1} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_0} = \bar{u}_{r2} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_0}, \quad \bar{u}_{x1} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_0} = \bar{u}_{x2} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_0} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_{r1}}{\partial x} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_0} = \frac{\partial \bar{u}_{r2}}{\partial x} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_0}, \quad \frac{\partial^2 \bar{u}_{r1}}{\partial x^2} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_0} = \frac{\partial^2 \bar{u}_{r2}}{\partial x^2} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_0}, \\ \frac{\partial^3 \bar{u}_{r1}}{\partial x^3} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_0} = \frac{\partial^3 \bar{u}_{r2}}{\partial x^3} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_0}, \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial \bar{u}_{x1}}{\partial x} - n_0 \bar{u}_{r1} \right) \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_0} = \left(\frac{\partial \bar{u}_{x2}}{\partial x} - n_0 \bar{u}_{r2} \right) \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_0},$$

где параметры \bar{v}_1 , \bar{p}_1 , \bar{u}_{x1} , \bar{u}_{r1} вычисляются в области $0 < \bar{x} < \bar{x}_0$, а параметры \bar{v}_2 , \bar{p}_2 , \bar{u}_{x2} , \bar{u}_{r2} вычисляются в области $\bar{x} > \bar{x}_0$;
условия на бесконечности

$$\bar{u}_x(\tau, \bar{x}) = \bar{u}_r(\tau, \bar{x}) = \bar{p}(\tau, \bar{x}) = \bar{v}(\tau, \bar{x}) \rightarrow 0 \text{ при } |\bar{x}| \rightarrow \infty; \quad (7)$$

начальные условия

$$\bar{v}(\tau, \bar{x}) \Big|_{t=0} = \bar{p}(\tau, \bar{x}) \Big|_{t=0} = 0,$$

$$\bar{u}_x(\tau, \bar{x})\Big|_{t=0} = \bar{u}_r(\tau, \bar{x})\Big|_{t=0} = \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial \tau}\Big|_{t=0} = \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \tau}\Big|_{t=0} = 0. \quad (8)$$

В (1)–(8) приняты обозначения

$$L_1 = \left(1 + 2A \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - U^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}, \quad L_2 = L_3 = -\left(v_0 + B \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right),$$

$$L_4 = \left(1 + 2A \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \left(\frac{1}{12} \frac{h^2}{R^2} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 1\right) + U^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2},$$

$$A = k \frac{3\zeta + \eta}{3\zeta + 4\eta}, \quad B = k \frac{3\zeta + 2\eta}{3\zeta + 4\eta},$$

$$a = \frac{rv_0^2}{K}, \quad k = 2h \frac{v_0}{R} \frac{1-n_0}{E}, \quad k_0 = \frac{r_0}{r} \frac{R}{h} U^2,$$

$$U = \frac{v_0}{c_0}, \quad c_0^2 = \frac{E}{\rho_0(1-v_0^2)}, \quad \bar{u}_x = \frac{u_x}{R}, \quad \bar{u}_r = \frac{u_r}{R},$$

$$\bar{v} = \frac{v}{v_0}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho v_0^2}, \quad \tau = \frac{v_0}{R} t, \quad \bar{x} = \frac{x}{R}, \quad \zeta = \frac{2}{3} \eta.$$

Здесь v_0 – характерная скорость течения, Re – число Рейнольдса, K – объемный модуль упругости, v – средняя скорость, определяемая зависимостью

$$\pi R^2 v = \int_0^R 2p r v_x dr.$$

Метод решения. Начально-краевая задача (1) – (7) решается методом преобразований Лапласа по времени τ

$$f^L(s, \bar{x}) = \int_0^\infty \bar{f}(t, \bar{x}) e^{-st} dt,$$

где s – параметр преобразований Лапласа.

После некоторых преобразований для давления p^L может быть получено следующее разрешающее уравнение

$$n_1 \frac{d^8 p^L}{dx^8} + n_2 \frac{d^6 p^L}{dx^6} + n_3 \frac{d^4 p^L}{dx^4} + n_4 \frac{d^2 p^L}{dx^2} + n_5 p^L = 0 \quad (9)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 n_1 &= -a_1 a_4 m, & n_2 &= s^2 a_4 m U^2 + \frac{1}{2} a a_1 a_4, \\
 n_3 &= m(a_2^2 - a_1 a_5) - \frac{1}{2} a s^2 a_4 U^2, \\
 n_4 &= m a_5 s U^2 - \frac{1}{2} a(a_2^2 - a_1 a_5) + 2 m s a_2 b_1 + k_0 a_1, \\
 n_5 &= -k_0 s^2 U^2 - \frac{1}{2} a a_5 s^2 U^2, & a_1 &= 1 + 2s, & a_2 &= -(n_0 + sB), \\
 a_4 &= a_1 \frac{h^2}{12R^2}, & a_5 &= a_1 + s^2 U^2, & b_1 &= -4 \frac{k_0}{Re}, & m &= \frac{Re}{2s(sRe - 8)},
 \end{aligned}$$

индекс L обозначает изображение соответствующей величины.

Решение уравнения (9) в области $(0 < \bar{x} < \bar{x}_0)$ записывается в виде

$$\begin{aligned}
 P_1^L(s, \bar{x}) &= e^{-k_1 \bar{x}} (A_1(s) \cos k_2 \bar{x} + A_2(s) \sin k_2 \bar{x}) + \\
 &+ e^{-k_3 \bar{x}} (A_3(s) \cos k_4 \bar{x} + A_4(s) \sin k_4 \bar{x}) + \\
 &+ e^{k_1 \bar{x}} (A_5(s) \cos k_2 \bar{x} + A_6(s) \sin k_2 \bar{x}) + \\
 &+ e^{k_3 \bar{x}} (A_7(s) \cos k_4 \bar{x} + A_8(s) \sin k_4 \bar{x}).
 \end{aligned} \tag{10}$$

Учитывая условия убывания при $|\bar{x}| \rightarrow \infty$ (7), решение уравнения (9) в области $\bar{x} > \bar{x}_0$ принимает вид:

$$\begin{aligned}
 p_2^L(s, t) &= e^{-k_5 \bar{x}} (A_9(s) \cos k_6 \bar{x} + A_{10}(s) \sin k_6 \bar{x}) \\
 &+ e^{-k_7 \bar{x}} (A_{11}(s) \cos k_8 \bar{x} + A_{12}(s) \sin k_8 \bar{x}).
 \end{aligned} \tag{11}$$

В решениях (10), (11) k_m ($m=1,2,3,\dots,8$) – комплексно-сопряженные корни характеристического уравнения, соответствующие дифференциальному уравнению (9). Скорости и перемещения определяются аналогично.

Подставляя решения в граничные условия (5), (6), получим в области изображений систему уравнений для определения коэффициентов $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{12}$:

$$\sum_{j=1}^{12} A_j(s) e^{m_j \bar{x}} (a_{jn} \cos l_n \bar{x} + b_{jn} \sin l_n \bar{x}) = f_n(s), \tag{12}$$

где первые четыре уравнения ($n = 1,2,3,4$) определяются при $\bar{x}=0$, а остальные ($n = 5,6,\dots,12$) определяются в месте закупорки при $\bar{x} = \bar{x}_0$.

В дальнейшем решения были получены для импульса, соответствующего реальному изменению пульсового давления сердца:

$$\bar{p}(\bar{x}, \tau)\Big|_{\bar{x}=0} = \bar{A}\tau^2 e^{-\alpha\tau}, \quad (13)$$

где $\bar{A}=2,432 \cdot 10^{-4}$, $\alpha=0,018$.

Численные расчеты и анализ результатов. Численное обращение преобразования Лапласа применялось на основе рядов Фурье по синусам [8] при следующих параметрах:

$$\begin{aligned} U &= 0,02191, & Re &= 2340, & A &= 4,073, & B &= 5,431, \\ k_0 &= 0,6, & a &= 0,2178 \cdot 10^{-4}, & k &= 8,1459, & \bar{x}_0 &= 12. \end{aligned}$$

Некоторые результаты расчетов представлены на рис.1,2,3,4. Здесь показаны изменения давления $\bar{p} = (p/\rho_0)/v_0^2$ и радиального перемещения $\bar{u}_r = u_r/R$ в зависимости от времени \bar{t} для различных сечений в оболочке.

На рис.1 кривая 1 соответствует форме начального импульса (13) в сечении $\bar{x} = 2$, если по всей длине оболочки тромб отсутствует, а кривая 2 соответствует импульсу давления в том же сечении $\bar{x} = 2$, но в оболочке в сечении $\bar{x} = 12$ имеется тромб.

На рис.2 так же показано развитие начального импульса, но результаты вычисляются в сечении $\bar{x} = 10$. Кривая 1 – в оболочке нет тромба, кривая 2 – в оболочке в сечении $\bar{x} = 12$ находится тромб.

На рис.3 кривая 1 соответствует значению радиального перемещения в сечении $\bar{x} = 2$ при условии, что в оболочке тромба нет, а кривая 2 соответствует значению перемещения в том же сечении $\bar{x} = 2$, но в оболочке при $\bar{x} = 12$ имеется тромб.

На рис. 4 показаны значения радиального перемещения в сечении $\bar{x} = 10$ при отсутствии тромба – кривая 1 и при наличии тромба в $\bar{x} = 12$ – кривая 2.

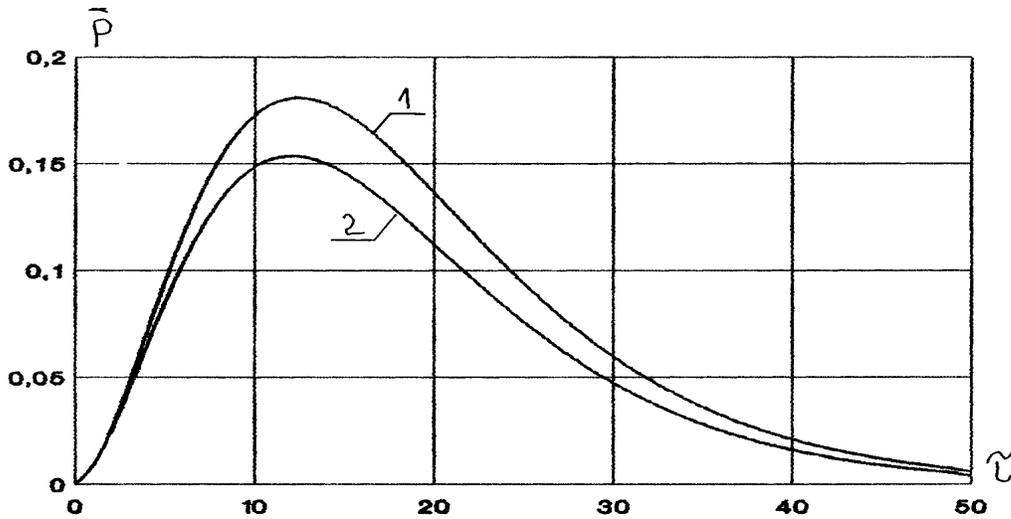


Рис. 1. Изменение давления $\bar{p} = (p/\rho_0)/v_0^2$ в зависимости от времени τ :

- 1 – импульс давления в сечении $\bar{x} = 2$, если нет тромба;
- 2 – импульс давления в сечении $\bar{x} = 2$ при наличии тромба в $\bar{x} = 12$.

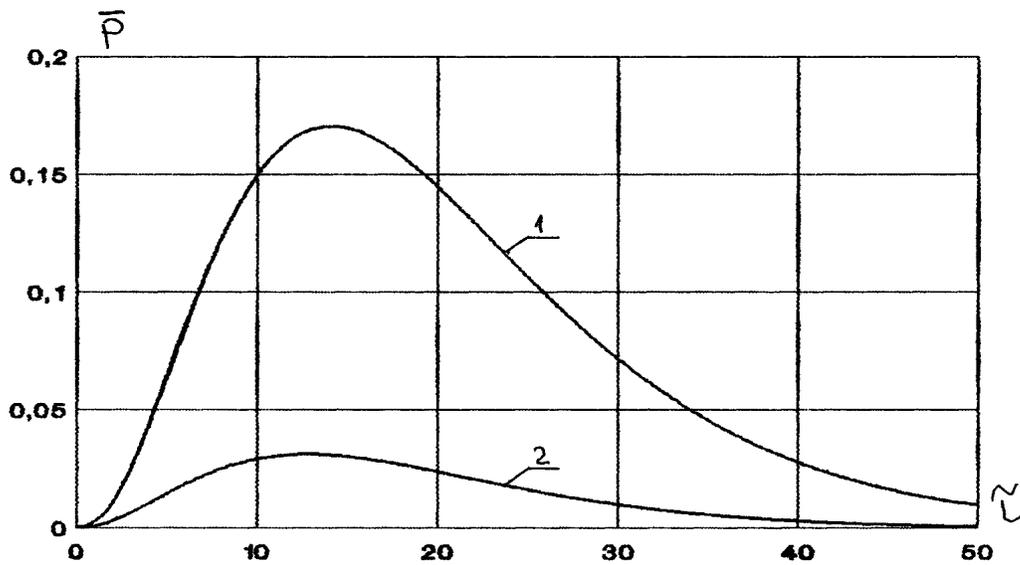


Рис. 2. Изменение давления $\bar{p} = (p/\rho_0)/v_0^2$ в зависимости от времени τ :

- 1 – импульс давления в сечении $\bar{x} = 10$, если нет тромба;
- 2 – импульс давления в сечении $\bar{x} = 10$ при наличии тромба в $\bar{x} = 12$.

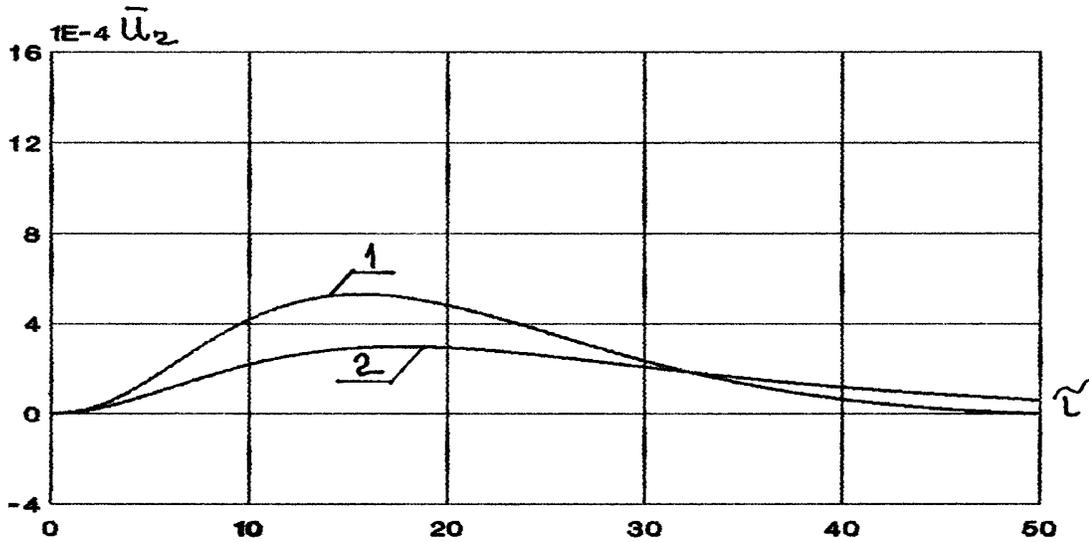


Рис. 3. Изменение радиального перемещения $\bar{u}_r = u_r/R$ в зависимости от времени τ :

- 1 – радиальное перемещение в сечении $\bar{x} = 2$, если нет тромба;
- 2 – радиальное перемещение в сечении $\bar{x} = 2$ при наличии тромба в $\bar{x} = 12$.

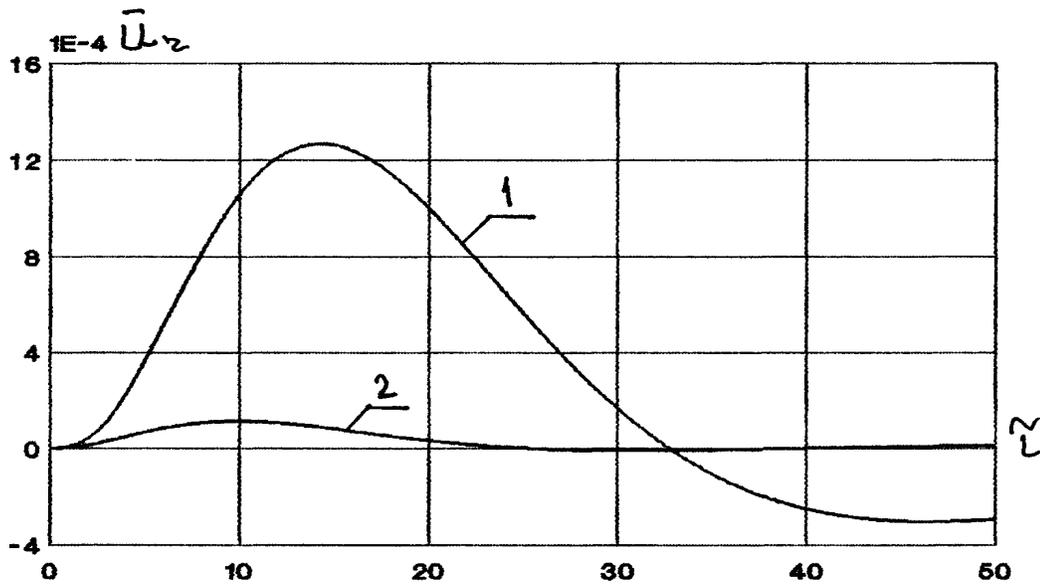


Рис. 4. Изменение радиального перемещения $\bar{u}_r = u_r/R$ в зависимости от времени τ :

- 1 – радиальное перемещение в сечении $\bar{x} = 10$, если нет тромба;
- 2 – радиальное перемещение в сечении $\bar{x} = 10$ при наличии тромба в $\bar{x} = 12$.

Если сравнить результаты распространения импульса давления рис.1,2 и радиального перемещения рис.3,4 в соответствующих сечениях $\bar{x} = 2$ и $\bar{x} = 10$ при отсутствии тромба и при его наличии, то видно, что для небольших удалений от начала оболочки ($\bar{x} = 2$) влияние тромба незначительно. Если же рассматривать значение этих же параметров вблизи тромба ($\bar{x} = 10$), то наличие тромба в оболочке имеет значительное влияние на значение импульса и перемещения.

Если сравнивать результаты распространения импульса давления рис. 1,2 и радиального перемещения рис 3,4 с экспериментальными данными задач биомеханики, то кривые 1 рис.1,2,3,4, которые соответствуют граничным условиям защемления торцов оболочки (5), дают более точное качественное соответствие с данными наблюдений [7,11].

Работа выполнена при поддержке Государственным фондом фундаментальных исследований (Грант 01.07/00079).

І.Т.Селезов, О.В.Звонарьова. Поширення імпульсу в циліндричній оболонці з рідиною при наявності закупорки.

РЕЗЮМЕ. Досліджується поширення неусталеної хвилі від торця в напівнескінченній циліндричній оболонці при наявності в оболонці на деякому віддаленні закупорки. Припускається, що матеріал оболонки - в'язкопружний, рідина - в'язка. Рух оболонки описується теорією Кірхгофа-Лява, рух рідини - рівняннями, усередненими по поперечному перерізу. Задача розв'язується перетворенням Лапласа за часом з наступним чисельним оберненням. Проводиться аналіз чисельних результатів для тиску і радіального переміщення оболонки при наявності закупорки.

IT. Selezov, O.V. Zvonareva. Pulse propagation in cylindrical shell with fluid in the presence of congestion.

SUMMARY. Unsteady wave propagation from the end face of a semi-infinite cylindrical shell in the presence of congestion at some distance from the end face. It is assumed that shell material is viscoelastic and fluid is viscons. The motion of shell is described by the Kirchhoff-Love theory, the fluid motion by the equations averaged over the cross-section. The problem is solved by the Laplace transform in time with a consequent numerical inversion. The analysis of numerical results for pressure and shell radial displacement in the presence of congestion is carried out.

Список использованной литературы

1. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М., 1967.-984с.
2. Селезов И.Т. Моделирование волновых и дифракционных процессов в сплошных средах. – Киев: Наук, думка, 1989. – 204 с.
3. Селезов И.Т. Волновые процессы в гидродинамических и упругих средах. – Прикл. Гидромеханика, 2000, 2(74), №4.-С. 99-118.
4. Селезов И.Т. Исследование неустановившихся волновых движений в гидроупругих системах оболочка-жидкость.- Прикл. Проблемы механики тонкостенных конструкций. М., Изд. Моск. Ун-та, 2000.-С. 286-305.
5. Селезов И.Т., Звонарева О.В. Распространение неустановившихся гидроупругих волн в полубесконечной кусочно-постоянной цилиндрической оболочке с жидкостью. - Симферополь. КФТ. - Вып. 15-1999, С.77-73.
6. Селезов И.Т., Каплун Ю.М. Влияние сужения кровеносного сосуда на распространение пульсового давления крови // Бионика. – 1991. - 24. -С. 50-54.
7. Физиология кровообращения, регуляция кровообращения (Руководство по физиологии). Л.: Наука. – 1986. - 640 с.
8. Doetsch T. Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace Transformation. - Muenchen: R. Oldenbourg, 1956. Русский перевод: Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа.-М., ГИФМЛ, 1960.-208с.
9. Maxwell J.A., Anliker A.M. The dissipation and dispersion of small waves in arteries and veins with viscoelastic wall properties. Biophys., 1968. -8.-P. 920-950.
10. Moodie E.B., Barday D.W., Tait R.T. A boundary value problems for fluid-filled viscoelastic tubes. Mathematical model- 1983.- 4. P. 195 - 207.
11. Pedley, T J., The fluid mechanics of large blood vessels, Cambridge, Cambridge University Press, 1980. Русский перевод: Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. Мир, 1983. - 400 с.
12. Selezov I.T., Avramenko O., Fratamico G., Pallotti G., Pettazzoni P. Stress concentration due to advancing heart pulse through a blood vessel joint. - J. of Mechanics in Medicine and Biology, 2001, Vol., 1 №2-P. 79-96.
13. Selezov I.T., Pallotti G., Fratamico G., Pettazzoni P. Viscoelasticity with permanent deformation in investigation of pulse propagation in blood vessels- J. of Mechanics in Medicine and Biology, 2001, 1, №2. - P.1 39-152.
14. Selerov I.T., Zvonareva O.V. Modelling of transient hydroelastic waves in a fluid – filled cylindrical shell // Доповіді НАН України. - 1999 -№7. – С.66-71.

Поступила в редколлегию 07.07.03