

РЫЖАКОВ А.Н., канд. физ.-мат. наук, Таврический нац. ун-т.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КИНЕТИКИ МАГИСТРАЛЬНОЙ ТРЕЩИНЫ В ХРУПКИХ И КВАЗИХРУПКИХ ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ.

Рассмотрена проблема численного моделирования процесса развития магистральной трещины при импульсном нагружении. Показано, что основные положения модели согласуются с известными аналитическими решениями и результатами экспериментов по иницированию трещины динамическим нагружением. Полученные в результате реализации численной модели данные позволяют описывать процесс разрушения на завершающей стадии.

Развитие магистральной трещины – сложный, многоступенчатый процесс, который проявляется на различных масштабных уровнях. Моделирование этого процесса требует, с одной стороны, исследования физических закономерностей разрыва отдельных межатомных (межмолекулярных) связей, разработки на их основе физически обоснованного критерия разрушения; с другой стороны, изучения особенностей динамики напряженно – деформированного состояния, энергетических потоков в области берегов и вершины трещины, поведения разрушенного или частично поврежденного материала на основе подходов механики сплошной среды.

Основная трудность при моделировании процесса распространения магистральной трещины состоит в построении системы определяющих уравнений, адекватно описывающих поведение среды в широком диапазоне изменения физических и механических параметров (деформаций, напряжений, скорости деформирования, температуры, энергии межатомных связей, флуктуационного объема и т.д.) на различных структурных уровнях, а также, в интегрировании уравнений движения сплошной среды при произвольном импульсном нагружении с учетом постоянного изменения граничных условий в связи с ростом трещины конечной длины.

Из анализа экспериментальных данных и аналитических зависимостей, описывающих кинетику магистральной трещины, следует, что предельной скоростью развития трещины является скорость волны Рэлея в материале образца. Определение закона движения трещины - $V(t)$, должно осуществляться путем решения динамической задачи механики разрушения с подвижными границами, с использованием формулировки критерия разрушения. Аналитический подход предполагает, что закон движения трещины

является достаточно гладкой дифференцируемой функцией времени. Экспериментально установленный дискретный характер роста трещины опровергает базовое предположение, выдвигаемое при построении аналитических моделей движения трещины, относительно непрерывного характера ее развития.

Исходя из вышеизложенного, более последовательным подходом к исследованию закономерностей развития магистральных трещин представляется исходная формулировка критерия разрушения и определение зависимости $V(t)$ на основе моделирования процесса разрыва межатомных связей в зоне повышенных напряжений. Поставленная задача может быть решена в полном объеме только с использованием численных методов. При формулировке системы определяющих уравнений необходимо учитывать экспериментальные данные по кинетике развития магистральных трещин при импульсном нагружении хрупких и квазихрупких твердых тел.

Численная модель развития магистральной трещины.

Модель движения хрупкой (квазихрупкой) магистральной трещины строится с использованием развитого в [1] на основе термофлуктуационного подхода критерия разрыва межатомных связей, с учетом закономерностей формирования напряженно-деформированного состояния (НДС) в области вершины трещины и механизмов диссипации упругой энергии. В отличие от аналитических моделей [2,3,4] и основанных на них численно – экспериментальных методов скорость движения трещины не задается в качестве граничного условия и не берется из данных эксперимента, а находится в процессе решения задачи, исходя из амплитудно-временных параметров нагружающего импульса, критерия разрушения и исходной длины трещины.

Система определяющих уравнений включает уравнения движения и законы сохранения (1); скалярное уравнение состояния (2); тензорное уравнение, связывающее тензор скоростей деформаций и тензор скоростей изменения напряжений (3).

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \nabla(\mathbf{r}\mathbf{u}) = 0; \quad \frac{\partial(\mathbf{r}\dot{\mathbf{u}})}{\partial t} + \nabla(\mathbf{r}\mathbf{u}\mathbf{u} - \hat{\mathbf{S}}) = 0; \quad \frac{\partial e}{\partial t} + \nabla(e\mathbf{u} - \mathbf{u}\hat{\mathbf{S}}) = 0 \quad (1)$$

$$D = K \left(\frac{r}{r_0} - 1 \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{S}}}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla\mathbf{r} + \hat{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{w}} - \hat{\mathbf{w}}\hat{\mathbf{S}} = 2m(\hat{\mathbf{e}} - 1/3(\hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{G}})\hat{\mathbf{G}}), \quad \hat{\mathbf{w}} = 1/2(\nabla\mathbf{u} - \nabla\mathbf{u}^T) \quad (3)$$

В (1 – 3), при рассмотрении деформации элемента среды, тензор напряжений Коши $\hat{\mathbf{S}} = s_{ij}^{\mathbf{r}, \mathbf{r}} k^i k^j = s^{ij} k_i k_j$ представлен в виде суммы

девиаторной \hat{S} и шаровой \hat{D} части: $\hat{s} = \hat{S} - \hat{D}\hat{G}$, $\hat{D} = -1/3(\hat{s} \cdot \hat{G})$; \hat{G} – метрический тензор, компоненты которого $g_{ij} = k_i \cdot k_j$, $g^{ij} = k^i \cdot k^j$, $g_i^j = d_i^j$ используются в операциях подъема и опускания индексов; r – плотность; e – полная энергия единицы объема, $e = r(e + \dot{u}\dot{u}/2)$; K – модуль объемного сжатия; $\hat{e} = 1/2(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$ – тензор скоростей деформации, $\mathbf{u} = u_i k^i = u^i k_i$ – вектор скорости; Символом $\hat{e} \cdots \hat{G}$ обозначено двойное скалярное произведение. $\nabla = k^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ – оператор Гамильтона; k_i – векторы основного базиса выбранной СК, k^i – векторы взаимного базиса.

В дополнение к основным уравнениям механики сплошной среды, в качестве критерия разрушения, рассматривается условие:

$$\int_0^t \frac{dt}{\exp[(U_0(T) - v_A(T)K_I(t, V) / \sqrt{2pI}) / kT]} = A_0; \quad t = t_c \quad (4)$$

В (4): t – время нагружения связи; U_0 – энергия активации процесса разрушения; T – абсолютная температура; v_A – флуктуационный объем; A_0 – константа размерности времени (по порядку величины близка к периоду колебания атомов в воспринимающих растягивающую нагрузку связях); l – характерный размер зоны максимально нагруженных связей; t_c – время до разрыва связи. Величина динамического коэффициента интенсивности напряжений – $K_I(t)$ (КИН) определяется исходя из выражения для максимального касательного напряжения (t_{\max}) и результатов численного расчета НДС для трех точек ($r = 0.5; 1.5; 2.5 \text{ мм}$) на прямой, проходящей через вершину трещины перпендикулярно ее оси. Полученные данные экстраполируются в вершину трещины по методу наименьших квадратов.

Тип процесса разрушения стеклообразного полимера (хрупкое или квазихрупкое) зависит от условий проведения эксперимента и физико-механических параметров материала [5]. Разрушение будет квазихрупким, если в области вершины трещины развивается релаксационный процесс, характерное время которого $t_p = B \exp(U_p / kT)$ сравнимо со временем разрыва нагруженной связи в вершине трещины. Температура, при которой $t_p = t_c$ называется температурой хрупкости T_{xp} . В выражении для t_p : U_p – энергия

активации релаксационного процесса; коэффициент B для простых кинетических единиц (атомов, атомарных групп и сегментов) имеет смысл периода колебаний кинетической единицы около положения равновесия.

Энергия активации релаксационного процесса U_p повышает потенциальный барьер процесса разрушения U_0 , величина которого будет функцией температуры. С другой стороны, увеличение, с ростом температуры, подвижности отдельных полимерных цепей обуславливает возможность их независимого разрыва, что приводит к уменьшению флуктуационного объема n_A и U_0 на величины n_{A1} и U_{01} соответственно:

$$U_0(T) = U_0 + U_p H(t - t_p(T)) - U_{01} H\left(T - \frac{U_p}{k \ln(t/B)}\right) \quad (5)$$

$$n_A(T) = n_A - n_{A1} H\left(T - \frac{U_p}{k \ln(t/B)}\right)$$

Величины физических постоянных в формулах (4,5) задавались для ПММА согласно данным [6]:

$$B = 9.8 \cdot 10^{-15} \text{ с}$$

$$U_0 = 1.25 \cdot 10^{-18} \text{ дж}; \quad U_{01} = 1.03 \cdot 10^{-18} \text{ дж}; \quad U_p = 9.5 \cdot 10^{-20} \text{ дж};$$

$$n_A = 1.44 \cdot 10^{-28} \text{ м}^3; \quad n_{A1} = 9.6 \cdot 10^{-29} \text{ м}^3.$$

Начальные условия предусматривают, что при $t=0$ нагружаемое тело с трещиной находится в естественном ненапряженном и недеформированном состоянии; на свободных границах выполняются условия $s_{mn} = s_{nt} = 0$, где s_{mn} , s_{nt} - нормальные и касательные к свободной границе компоненты тензора напряжений.

Компьютерное моделирование процесса развития прямолинейной магистральной трещины сводится к численному интегрированию системы нелинейных дифференциальных уравнений (1 – 3) гиперболического типа. Условие (4) задает критерий изменения границы свободной поверхности. Основными искомыми величинами являются: плотность r ; вектор скорости \dot{u} ; тензор напряжений \hat{S} ; удельная внутренняя энергия P ; скорость трещины V .

Программа разбита на восемь основных блоков. В исходном блоке I определяется напряженно-деформированное состояние (компоненты тензора напряжений, смещения, деформации, плотности потенциальной и кинетической энергий) в каждой точке образца с трещиной. На основе данных НДС, в блоке II, на продолжении оси трещины, определяется узел J_m , в котором значение t_m является максимальным. Данный узел определяет положение вершины

трещины. В блоке III определяется смещение вершины трещины за интервал времени Δt . Если смещения не произошло, то программа приступает к определению КИН в статическом приближении. Если вершина трещины перешла в следующий узел, то смещение фиксируется в блоке IV и находится скорость развития трещины и $k(V)$ – скоростная поправка. В блоке VII, с учетом $k(V)$ и статического КИН определяется растягивающее напряжение s_s в вершине трещины. Определение s_s создает предпосылки для проверки выполнения критерия разрушения (4) (блок VIII). Если критерий (4) не выполняется, то осуществляется переход к следующему моменту времени $t = t + \Delta t$. В противном случае, узел J_c , в котором проводилась проверка выполнения критерия разрушения, отпускается. На следующем временном шаге проверка критерия будет производиться в узле $J_c = J_c + 1$. Скорость отпускания узла регулируется блоком I в соответствии с соотношением $F = F_0 \left(1 - \frac{c_R t}{\Delta x}\right)$, где F_0 – сила сцепления, действующая на узел J_c в начале процедуры освобождения узла.

Для интегрирования используется модифицированный метод конечных элементов [7], который удовлетворяет требованиям аппроксимации, устойчивости и сходимости.

Ограничение $\Delta t = \Delta x / c_1$ (Δx – характерный размер счетной ячейки вдоль движения трещины; c_1 – скорость упругих продольных волн), накладываемое на шаг по времени Δt условием Куранта, диктуется не только формальным соображением обеспечения устойчивости счета, но и самой сущностью протекающего процесса. При выполнении критерия (4) соответствующий узел в вершине трещины должен быть освобожден. Если при этом считать, что вершина трещины автоматически смещается в соседний узел, то длина трещины получает приращение Δx . Чтобы скорость роста трещины $V = \Delta x / \Delta t$ не превышала предельно возможного значения c_R , узел, в котором выполнен критерий разрушения, освобождается постепенно путем уменьшения силы взаимодействия по закону: $F = F_0 \left[1 - \frac{c_R t}{\Delta x}\right]$, где F_0 – сила, действующая на отпускаемый узел в момент выполнения критерия. Положение вершины трещины полагается совпадающим с положением центра «розетки» напряжений, которая образуется изолиниями t_{\max} . При освобождении узла «розетка» смещается в направлении соседнего связанного узла со скоростью $V_{ck} < c_R$, которая определяется скоростью протекания волновых процессов в ЗПН (V_{ck} – скорость непрерывного развития трещины между узлами). Средняя скорость

развития трещины между узлами определяется как $V = \Delta x / (t - t_1)$, где t_1 – время освобождения предшествующего узла, t – время освобождения последующего узла.

Для описания кинетики трещины необходимо рассматривать два параметра ($V_{ск}$ и V), что объясняется неравномерным характером движения трещины. При достижении очередного узла расчетной сетки вершина трещины на некоторое время стабилизируется, и, после выполнения критерия разрушения (4), продолжает смещаться к следующему узлу со скоростью $V_{ск}$. Характерная для численных методов дискретность процесса вычислений приводит к возможности проверки выполнения критерия разрушения только в узлах расчетной сетки. В критерий (4) входит параметр l , величина которого порядка $10 \div 20$ межатомных расстояний. Поскольку $\Delta x = 0.025 \text{ см} \gg l$, то между узлами ячейки заключено множество воспринимающих нагрузку связей и вершина трещины, в пределах одной счетной ячейки, распространяется как в сплошной среде. Дискретность процесса разрушения может проявляться при прохождении вершины трещины по отдельным группам межмолекулярных и химических связей, расстояние между которыми существенно меньше Δx . Поэтому, определяемое в рамках предложенной модели время стабилизации положения вершины трещины в каждом узле (время остановки) можно понимать как суммарную продолжительность всех реальных остановок вершины трещины при увеличении ее длины $\Delta L = \Delta x$.

Результаты моделирования кинетики магистральной трещины.

На рис.1 показаны результаты численного решения задачи о симметричном импульсном растяжении трещины с начальной длиной $L=10$ мм в бесконечной пластине ПММА. Трещина нагружается линейно нарастающей нагрузкой ($\dot{\sigma} = 8 \cdot 10^5 \text{ МПа/с}$). На рис.1а приведен фрагмент временной зависимости КИН; на рис.1б – зависимость от времени средней скорости и скорости скачкообразного движения трещины.

После старта трещины ($t=42.3$ мкс) на графике КИН (рис.1а) наблюдаются осцилляции (до 10% критического КИН), связанные с чередованием периодов движения вершины трещины (уменьшение КИН) и остановки (увеличение КИН). Аналогичные колебания величины КИН наблюдается при обработке кинограмм полос изохром, снятых с хорошим временным и пространственным разрешением. С увеличением скорости трещины осцилляции величины КИН уменьшаются.

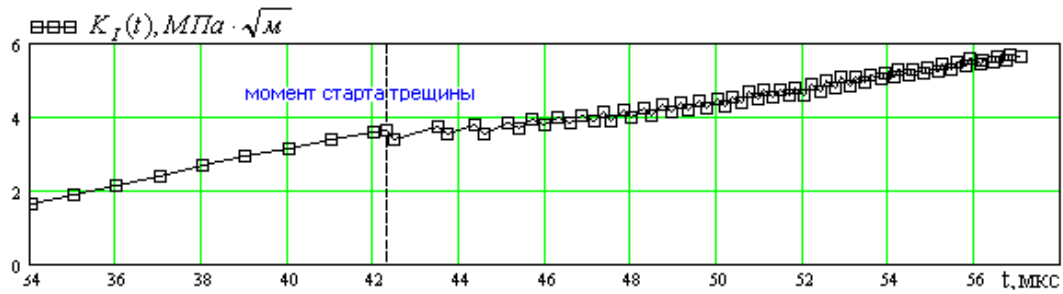


Рис. 1а.

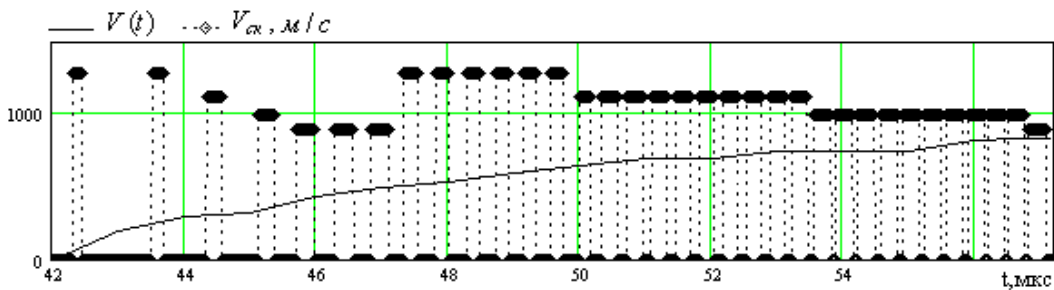


Рис. 1б.

В рамках предлагаемой модели движение вершины трещины на начальном этапе носит скачкообразный характер: перемещение вершины трещины с достаточно высокой скоростью – скачок ($900 \leq v \leq 1286$ м/с) сменяется полной остановкой на время (0.3 – 1.2 мкс).

Первое страгивание трещины осуществляется с Рэлеевской скоростью – $V_{ск} = 1286$ м/с. Возле следующего узла трещина останавливается – происходит накопление упругой энергии в области ее вершины. После выполнения критерия разрушения происходит новый скачок. По мере развития трещины ее средняя скорость (усреднение проводилось по циклу «скачок – остановка») нарастает от значения $V(t) = 200$ м/с до $V(t) = 818$ м/с (рис 1б); скорость скачка и время остановки, в целом, уменьшаются, что приводит к переходу от скачкообразного режима роста трещины к равномерному. Из рис. 1б видно, что через 16 микросекунд после старта трещины скорость скачка и средняя скорость трещины практически совпадают.

Изменение скорости скачка $V_{ск}$ носит немонотонный характер. После первичного страгивания трещины скорость скачка за 5 мкс уменьшалась от значения $V_{ск} = 1286$ м/с до $V_{ск} = 900$ м/с. Далее происходит резкое увеличение скорости скачка ($V_{ск} = 1286$ м/с) и, затем, последовательное снижение до величины $V_{ск} = 900$ м/с. При этом средняя скорость трещины возрастает до величины $V = 818$ м/с.

Многочисленные экспериментальные исследования кинетики магистральной трещины приводят к выводу, что средняя скорость ее развития не достигает предельной величины – c_R . Этот вывод подтверждается экспериментальными данными, которые получены Кальтхоффом (метод каустик) и Сакаи (метод динамической фотоупругости) на образцах из эпоксидной смолы (Аралдит – В). На

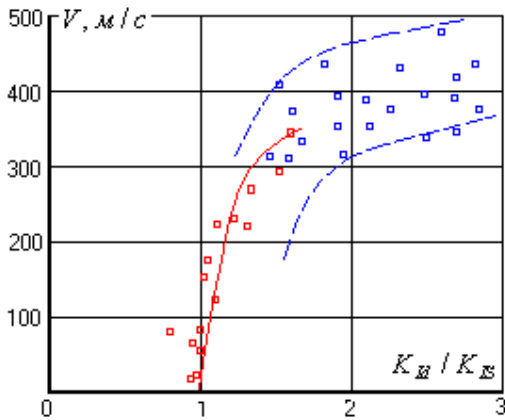


Рис.2

рис.2 показана зависимость между скоростью трещины и величиной отношения динамического КИН к статической вязкости разрушения (K_{Id} / K_{Is}).

Несмотря на высокий разброс экспериментальных данных, в случае высоких скоростей трещины, из анализа рис.3 можно заключить, что даже при отношении $K_{Id} / K_{Is} = 3$ скорость трещины не превышает 500 м/с.

Аналогичные величины

скорости роста трещины (в статически нагруженных образцах из ПММА) были получены в [8] методом скоростной съемки и фотографическим путем. В начале процесса (первые 0.05 с) скорость развития трещины составляла 374 м/с, далее она увеличивалась, и на завершающей стадии процесса разрушения происходит со скоростью до 700 м/с. Довольно большую протяженность имеет область, в которой скорость разрыва составляет $2/3$ конечной скорости.

Предпринимались попытки аналитически объяснить несоответствие максимальных экспериментально зарегистрированных значений средней скорости трещины и скорости волны Рэлея [9]. В работе исследовалось НДС у края полубесконечной трещины, распространяющейся в линейно-упругой изотропной среде. Закон движения трещины $0 \leq L'(t) < c_R$ полагается известным и задается в виде граничного условия задачи. Источником возмущения служат сосредоточенные растягивающие силы, приложенные по нормали к берегам трещины, величина которых изменяется по степенному закону: $s(t, x) = t^1 d(x) H(t)$. Решение уравнений механики сплошной среды, в совокупности с наложенными граничными условиями, приводит к выводу о существовании предельного значения скорости трещины $V_p < c_R$. Предлагаемое физическое объяснение существования скорости V_p базируется на известном решении задачи Лэмба

($I = 0$), согласно которому, поверхность полупространства между фронтами волн расширения и Рэлея движется против действия силы, и лишь за фронтом рэлеевской волны вплоть до источника – в направлении силы. Область сжатия берегов смещается со временем от источника к краю трещины. Произвольную нагрузку ($I > 0$) можно аппроксимировать как набор ступенчатых нагрузок возрастающей интенсивности, каждая из которых образует свою область сжатия. Суперпозиция этих возмущений приводит к появлению в вершине трещины сжимающих напряжений, препятствующих увеличению скорости трещины. Однако данное объяснение справедливо только для трещины нагружаемой сосредоточенной нагрузкой, в точке удаленной от вершины трещины.

В рамках предлагаемой в статье модели, средняя скорость развития трещины также не достигает рэлеевской скорости. Причины такого поведения скорости трещины следует искать, анализируя особенности динамического перераспределения НДС в области вершины движущейся трещины, которые можно пояснить, рассматривая взаимодействие следующих процессов.

- Непрерывное увеличение потока энергии в вершину трещины по мере ее роста (увеличение поверхности «стока» энергии; увеличение интенсивности растягивающих напряжений на полости трещины), что обуславливает уменьшение времени остановки трещины и увеличение средней скорости трещины между узлами;
- Перераспределение запасенной в вершине трещины энергии при образовании новой поверхности. По мере нагружения трещины, концентрация энергии в ее вершине и размеры зоны повышенных напряжений возрастают. Для перераспределения энергии при увеличении длины трещины требуется все больше времени, что приводит к снижению скорости непрерывного распространения трещины между узлами.

В результате совместного проявления этих процессов величины средней скорости и скорости непрерывного развития трещины сближаются и трещина начинает развиваться с постоянной максимальной скоростью ($c = 0.7c_R$), без остановок в узлах.

На рис.3 приведены изолинии поля изохром и потенциальной энергии в области вершины движущейся трещины в моменты времени $t=45.11$ и 45.45 мкс. Наглядно видно смещение «розетки» напряжений при движении вершины трещины и особенности динамической

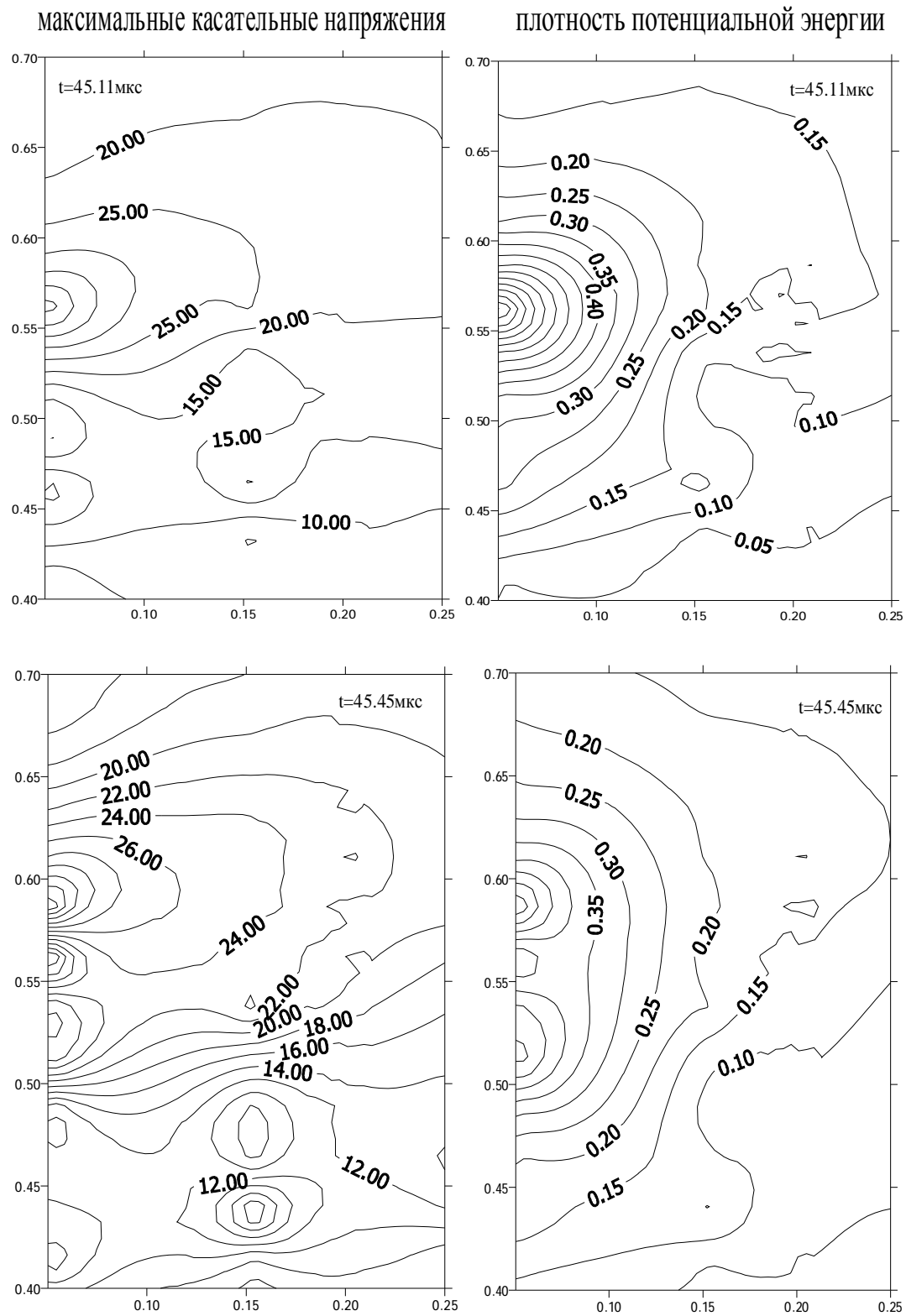


Рис.3.

перестройки поля напряжений и транспорта потенциальной энергии в ЗПН в связи с изменением длины свободной поверхности трещины. Максимальная плотность потенциальной энергии наблюдается в точке, совпадающей с вершиной «розетки» напряжений, что оправдывает поиск вершины трещины в точке с максимальной величиной t_{\max} . Момент времени $t = 45.11 \text{ мкс}$ соответствует времени отпускания очередного узла, после чего начинается процесс перераспределения упругой энергии во вновь образованную вершину, которая находится вблизи точки с координатой 0.6 см по вертикальной оси. В процессе перераспределения упругой энергии происходит значительное снижение ее концентрации (плотность упругой энергии в области вершины трещины снизилась в полтора раза), что делает невозможным дальнейший рост трещины без определенного периода стабилизации для восстановления прежнего уровня концентрации энергии.

Полученные в результате использования численной модели движущейся трещины данные хорошо отображают основные качественные и количественные закономерности процесса динамического хрупкого (квазихрупкого) разрушения и позволяют моделировать основные стадии этого процесса не используя дополнительных экспериментальных данных. Представленная модель применима для моделирования процессов распространения магистральной трещины в различных твердых телах (стекла, полимеры, керамика, металлы), при условии, что процесс разрушения протекает хрупко (квазихрупко) и адекватно описаны процессы релаксации напряжений ($U_0(T), v_A(T)$) в области вершины трещины.

А. М. Рижак Чисельне моделювання кінетики магистральної тріщини у крупких твердих тілах.

РЕЗЮМЕ. Розглянута проблема численного моделювання розвитку магистральної тріщини при імпульсному навантаженні. Основні положення моделі узгоджені з відомими аналітичними рішеннями та результатами експериментів по ініціюванню тріщини за допомогою імпульсного навантаження. Отримані результати дозволяють описати процес динамічного руйнування на його останньому етапі.

A. N. Rizhakov Numerical modeling movement of a main crack in brittle and almost brittle solid bodies.

SUMMARY. The problem of numerical modeling of process of development of a main crack is considered at pulse loading. It is shown, that the basic rules of model will be coordinated to the known analytical decisions and results of experiments on initiation of

a crack dynamic loading. Received as a result of realization of numerical model the data allow describing process of destruction at a finishing stage.

Список использованной литературы.

1. Костандов Ю.А., Рыжаков А.Н., Шиповский И.Е. Модель квазихрупкого разрушения при импульсном нагружении //Проблемы прочности.- 2002.- №6, с.131-138.
2. Костров Б.В., Никитин Л.В., Флитман Л.М. Механика хрупкого разрушения. – Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1969, №3, с. 112-125.
3. Костров Б.В. Распространение трещин с переменной скоростью// ПММ. 1974. т.38. №3. с.551 – 560.
4. Партон В.З., Борисковский В.Г. Динамика хрупкого разрушения. – М.: Машиностроение, 1988. – 240с.
5. Костандов Ю.А., Рыжаков А.Н., Шиповский И.Е. Взаимосвязь критических параметров процесса квазихрупкого разрушения при импульсном нагружении.- Динамические системы, 2001, вып. 17, с. 157 – 165.
6. Бартнев Г.М., Зеленев Ю.В. Физика и механика полимеров: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. школа, 1983. – 391с.
7. Корнеев А.И., Николаев А.П., Шиповский И.Е. Приложение метода конечных элементов к задачам соударения твердых тел. // 7 Всесоюзная конференция "Численные методы решения задач теории упругости и пластичности". - Новосибирск, 1982.-С.122-129.
8. Гуль В.Е. Структура и прочность полимеров. – М., Химия, 1971. – 344с.
9. Сарайкин В.А. Динамика плоской упругой трещины при переменных нагрузках. – Изв. АН СССР, МТТ, 1980, с.138-147.

Поступила в редколлегию 11.08.03