

УДК 539.375

В.А. КРЫВЕНЬ, д-р физ.-мат. наук, Тернопольский гос. техн. ун-т

## РАЗВИТИЕ ПОЛОС ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ СДВИГЕ СЖАТОГО МАССИВА, СОДЕРЖАЩЕГО ПАРАЛЛЕЛЬНУЮ СИСТЕМУ ТРЕЩИН

Исследовано узкополосную локализацию пластических деформаций у вершин параллельной системы равных и равноудаленных трещин сдвига в сжатом массиве. Учтено влияние сил трения берегов при раскрытии трещин. Обоснована возможность моделирования пластических деформаций при вершине трещины одной пластической полосой. Получены зависимости длин полос от величины нагрузки и уровня силы трения берегов трещины.

При деформировании тел с концентраторами напряжений в некоторых конструкционных материалах и грунтах наблюдается локализация пластических деформаций (ПД) в тонких полосах сдвига. Прежде всего, это имеет место при наличии на диаграмме  $\sigma - \epsilon$  четко выраженного горизонтального участка и резкого перехода от упругого состояния к пластическому [1, 2]. Узкополосная локализация не является альтернативой континуальному распределению ПД. Доказано [3], что при устремлении количества линий к бесконечности приходим к непрерывному распределению ПД, как частному случаю дискретно-линейчатого. То есть, дискретно-линейчатая пластическая зона также дает возможность приближенного определения континуальной зоны, точность которого повышается с увеличением количества линий.

Некоторые механизмы реализации дискретной структуры ПД изучались в работах [4-5]. Показано [5], что локализации ПД в плоскости трещины сдвига благоприятствует взаимодействие берегов трещины при ее раскрытии. Можно ожидать, что взаимодействие берегов окажет существенное влияние на формирование дискретно-линейчатой пластической зоны. При моделировании континуальной зоны дискретно-линейчатой количество линий, обеспечивающее требуемую точность приближения, также может зависеть от степени взаимодействия берегов трещины.

Пусть неограниченное, идеально упругопластическое тело, находящееся в условиях всестороннего сжатия, содержит систему параллельных трещин  $-l \leq x \leq l$ ,  $y = 2nh$  ( $n \in Z$ ),  $-\infty < z < \infty$ . Дополнительно к сжатию деформирование тела обусловлено действующими на бесконечности сдвиговыми усилиями  $t_{yz} = t_\infty$ ,  $t_{xz} = 0$ . Раскрытие трещин сопровождается трением берегов, вследствие которого внешние напряжения на берегах трещин

являются ненулевыми. Примем эти напряжения постоянными и равными  $t_0$  ( $t_0 < k$ ). При  $t_\infty > t_0$  вследствие концентрации напряжений у вершин трещин возникнут ПД, которые будем считать локализованными в узких полосах с центрами в вершинах трещин. Углы, образуемые полосами с трещиной, считаем известными, а

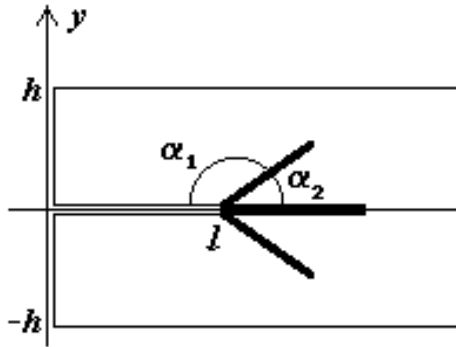


Рис. 1.

длины полос – подлежащими определению. На рис. 1 в полуплоское  $0 \leq x < \infty, -h < y < h, -\infty < z < \infty$  (период задачи) показана зона, образованная тремя полосами

**Формализация задачи.** В данном случае напряженно-деформированное состояние полностью определяется смещением  $w(x, y)$  вдоль оси аппликат. Две ненулевые компоненты тензора напряжений выражаются

формулами  $t_{xz} = m \partial w / \partial x$  и  $t_{yz} = m \partial w / \partial y$  ( $m$  – модуль сдвига). Смещение  $w(x, y)$  антисимметрично относительно каждой линии  $y = nh$  ( $n \in Z$ ) и симметрично относительно оси ординат, поэтому функцию  $w(x, y)$  достаточно определить в полуплоскости  $x \geq 0, 0 \leq y \leq h$  (область  $D_0$ ). В пластических полосах имеет место проскальзывание с образованием тангенциального разрыва смещения (функция  $w(x, y)$  терпит разрыв). В каждой точке полос должно выполняться условие пластичности:  $t_{xz}^2 + t_{yz}^2 = k^2$  ( $k$  – предел текучести при сдвиге).

Условимся считать первой полосу, составляющую наименьший угол  $\alpha_1$  с верхним берегом трещины. Остальные полосы перенумеруем против часовой стрелки и обозначим:  $\alpha_2$  – угол между первой и второй полосами, ...,  $\alpha_n$  – угол между  $n-1$  полосой и развивающейся на продолжении трещины  $n$ -ой полосой пластичности. Обозначим как  $d_1, d_2, \dots, d_n$  длины первой, второй и т.д. центральной  $n$ -ой полосы.

Вследствие условий равновесия и закона Гука функция  $t(z) = t_{yz}(x, y) + i t_{xz}(x, y)$  является аналитической в упругой части тела.

Для определения напряженно-деформированного состояния сформулируем краевую задачу для функции  $t(z)$  в области  $D$ ,

являющейся областью  $D_0$ , разрезанной по отрезкам пластических сдвигов.

Вследствие симметрии получаем:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} t(z) &= 0 \quad ((z = x + ih, x \geq 0) \cup \\ \cup (z = iy, 0 \leq y \leq h) \cup (z = x, x > l + d_n)) \end{aligned} \quad (1)$$

На берегах трещины напряжение  $t_{yz}$  постоянное и равное  $t_0$ , поэтому

$$\operatorname{Re} t(z) = t_0 \quad (z = x, 0 \leq x \leq l). \quad (2)$$

На берегах, соответствующих пластическим полосам разрезов в области  $D$ , выполняется условие пластичности, поэтому

$$|t(z)| = k \quad (r = r \exp(i(p - a_j \pm 0)), 0 \leq r \leq d_j), \quad (j = \overline{1, n}). \quad (3)$$

Примем условие прямолинейного развития полос [3]: в концевых точках полос площадка максимального касательного напряжения является касательной к полосам:

$$\max_n t_{nz} = t_{mz}, \quad (4)$$

где  $\dot{m}$  – единичный, нормальный к полосе вектор.

Напряженно-деформированное состояние на бесконечности задано соотношением

$$\lim_{z \rightarrow \infty} t(z) = t_\infty. \quad (5)$$

Функция  $t(z)$  является аналитической и однолистной в области  $D$ , вследствие чего она конформно отображает эту область на часть круга  $|t| \leq k$ ,  $\operatorname{Re} t \geq t_0$ ,  $\operatorname{Im} t \geq 0$  (область  $G$ , рис. 2). При этом имеет место следующее соответствие точек областей  $D$  и  $G$ :  $z = \infty + ih \rightarrow t = t_\infty$ ,  $z = 0 \rightarrow t = t_0$ ,  $z = l - 0 + i0 \rightarrow t = t_0 - i\sqrt{k^2 - t_0^2}$ ,  $z = d_n + i0 \rightarrow t = k$ . Часть границы области  $D$  ( $(z = x + iy, 0 \leq x < \infty) \cup (z = iy, 0 \leq y \leq h)$ ) отображается в отрезок ( $\operatorname{Im} t = 0, t_0 \leq \operatorname{Re} t \leq t_\infty$ ); отрезок ( $z = x, 0 \leq x \leq l$ ) – в  $\operatorname{Re} t = t_0, -\sqrt{k^2 - t_0^2} \leq \operatorname{Im} t \leq 0$ . Берега разрезов, соответствующих пластическим полосам, отображаются в дугу окружности ( $|t| = k, -\arccos(t_0/k) \leq \arg t \leq 0$ ). Кроме того, вследствие (4), отображение  $t(z)$  должно также удовлетворять условию

$$\arg t(d_j \exp(ia_j)) = -a_j. \quad (6)$$

**Исследование полос пластичности у вершин трещин.** Решение краевой задачи (1)-(5) сводится к построению данного конформного отображения. Введем вспомогательную комплексную плоскость  $t$ , в которой областям  $D$  и  $G$  соответствует верхняя полуплоскость  $H = \{ \text{Im}t \geq 0 \}$  (рис. 2, указано соответствие точек на границе областей  $G$  и  $H$ ).

Функцию  $t(z)$  будем искать в параметрическом виде:

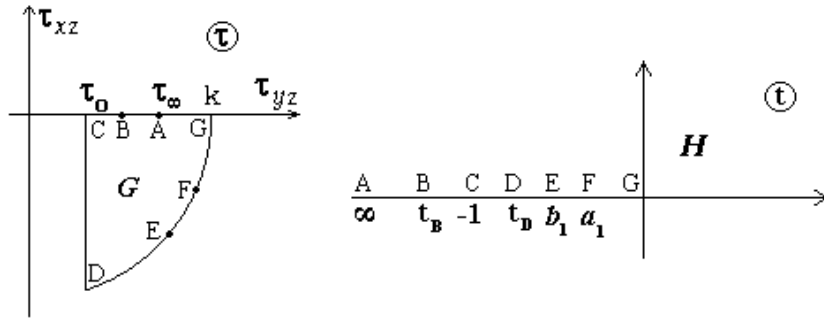


Рис. 2.

$$t = t(t), \quad z = z(t) \quad (t \in H). \quad (7)$$

Начальным точкам полос в плоскости  $H$  соответствуют точки  $t = a_j$  ( $j = \overline{0, n-1}$ );  $a_0 = t_D < a_1 < \dots < a_{n-1} < 0$ . Вершинам полос – точки  $t = b_j$  ( $j = \overline{1, n-1}$ );  $a_{j-1} < b_j < a_j$ .

Функцию  $t(t)$  находим композицией элементарных отображений:

$$t(t) = k \frac{t_6(t) \exp(iy_0) + \exp(-iy_0)}{t_6(t) + 1}, \quad (8)$$

где  $t_6(t) = t_5(t)^{y_0/p}$ ,  $t_5(t) = (t_3(t) + M)/(t_3(t) - M)$ ,  $t_3(t) = i\sqrt{t/(t+1)}$ ,

$$M = -tg \left( \frac{p}{2y_0} \left( 2 \arctg \frac{\sqrt{k^2 - t_0^2}}{t_\infty - t_0} - p \right) \right), \quad y_0 = \arccos(t_0/k).$$

Здесь и далее под  $z^q$  ( $0 < q < 1$ ) понимаем аналитическую в верхней полуплоскости функцию, принимающую вещественные и положительные значения при действительных и положительных значениях  $z$ .

Из формулы (8) при  $t = k \exp(iy)$  ( $y \in (-y_0, 0)$ ) получаем

$$t(y) = -\frac{c^2(y)}{c^2(y)+1}, \quad (9)$$

где

$$c(y) = M \left( \frac{\sin^{\frac{p}{y_0}} y_0 + y}{2} - \frac{\sin^{\frac{p}{y_0}} y_0 - y}{2} \right) / \left( \frac{\sin^{\frac{p}{y_0}} y_0 + y}{2} + \frac{\sin^{\frac{p}{y_0}} y_0 - y}{2} \right).$$

Поэтому, и вследствие соотношения (6) имеем:

$$b_j = -c^2(a_j) / (c^2(a_j) + 1).$$

В плоскости  $\tau$  начальной точке первой полосы соответствует  $t = k \exp(-iy_0)$ , поэтому  $t_D = -M^2 / (M^2 + 1)$ .

Отображение  $z(t)$  найдем при помощи преобразования Кристоффеля-Шварца:

$$z(t) = K \int_{-1}^t \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (h - b_j) dh}{(h - t_B)^{1/2} (h + 1)^{1/2} (h - t_D)^{1-a_1/p} \prod_{j=1}^{n-1} (h - a_j)^{1-a_{j+1}/p}}, \quad (10)$$

где  $t_B$  – соответствующая угловой точке  $z = ih$  области  $D$  точка плоскости  $t$ ,  $K = l \int_{-1}^{t_D} F(h) dh$ ,  $F(h)$  – модуль подынтегральной функции.

Неизвестные параметры  $t_B$ ,  $a_j$  ( $j = \overline{1, n-1}$ ) найдем из условий обеспечения требуемого соотношения высоты  $h$  слоя и длины  $l$  трещины, а также равенства длин берегов разрезов при отображении (10):

$$\begin{cases} l \int_{t_B}^{-1} F(h) dh = h \int_{-1}^{t_D} F(h) dh, \\ l \int_{a_{j-1}}^{b_j} F(h) dh = h \int_{b_j}^{a_j} F(h) dh \quad (j = \overline{1, n-1}). \end{cases} \quad (11)$$

Решение последней системы получено с помощью следующего итерационного алгоритма [7]:

$$\begin{cases} a_j^{(m+1)} = a_j^{(m)} + \frac{l'_j - l''_j}{l'_j + l''_j} (a_j^{(m)} - b_j), \\ t_B^{(m+1)} = t_B^{(m)} + \frac{l'/h' - l/h}{l'/h' + l/h} (t_D + 1) \quad (m = 0, 1, \dots), \end{cases} \quad (12)$$

где  $l'_j = \int_{a_{j-1}^{(m)}}^{b_j} F^{(m)}(h)dh$ ,  $l''_j = \int_{b_j}^{a_j^{(m)}} F^{(m)}(h)dh$ ,  $l' = \int_{-1}^{t_D} F^{(m)}(h)dh$ ,

$h' = \int_{t_B}^{-1} F^{(m)}(h)dh$ ,  $t_B^{(0)} = -2$ ,  $a_j^{(0)} = (b_j + b_{j+1})/2$  ( $j = \overline{1, n-2}$ ),

$a_{n-1}^{(0)} = b_{n-1} / 2$ ,  $F^{(m)}(h)$  является функцией  $F(h)$ , в которой  $a_j$  заменены на  $a_j^{(m)}$ .

Длины  $d_j$  полос пластичности определяются теперь так

$$d_j = \int_{a_{j-1}}^{b_j} F(h)dh \quad (j = \overline{1, n-1}), \quad d_n = \int_{a_{n-1}}^0 F(h)dh. \quad (13)$$

В табл. 1 приведены результаты вычислений длин полос для пучка, состоящего из трех полос, при различных значениях силы трения  $t_0$  и нагрузок  $t_\infty$ , для  $h=l$ . Угол между центральной и боковой полосами принят равным  $(2/3)\arccos(t_0/k)$ .

Таблица 1.

	$t_\infty / k$		
$t_0/k$	0,3	0,6	0,9
0	0,05263 0,03631	0,31440 0,09789	1,22646 0,12710
0,25	0,00283 0,00114	0,17339 0,04200	1,02453 0,07707
0,5		0,03011 0,00407	0,76153 0,03342
0,75			0,33840 0,00407

Отношение длин центральной и боковой полос возрастает с увеличением нагрузки. В случае  $t_0 = 0,6k$  и  $t_\infty = 0,9k$  длина центральной полосы превышает длину боковой более, чем в 80 раз.

Такая особенность соотношений длин полос пучка отражает тенденцию увеличения протяженности континуальной пластической зоны в направлении трещины при увеличении нагрузки и при увеличении силы трения [6, 7]. Поэтому при значительном трении берегов трещины имеются основания для моделирования

континуальной пластической зоны одной полосой. Для этого случая функцию  $z(t)$  можно получить в замкнутом виде композицией элементарных отображений:

$$z(t) = \frac{2h}{p} \ln \left( \sqrt{\frac{t+1}{t_D+1}} sh \frac{pl}{2h} + \sqrt{\frac{t+1}{t_D+1}} sh^2 \frac{pl}{2h} + 1 \right) \quad (14)$$

Функция  $t(z)$  определяется формулой (7), в которой  $t(t)$  суть функция (8), а  $z(t)$  – (14).

Поскольку в конечной точке полосы в плоскости  $t$  соответствует  $t = 0$ , длину  $d$  пластической полосы получаем из формулы (14):

$$d = z(0) - l.$$

Зависимости длин пластических полос от нагрузки  $t_\infty$  для различных значений  $t_0$ , величины силы трения и соотношений длины  $l$

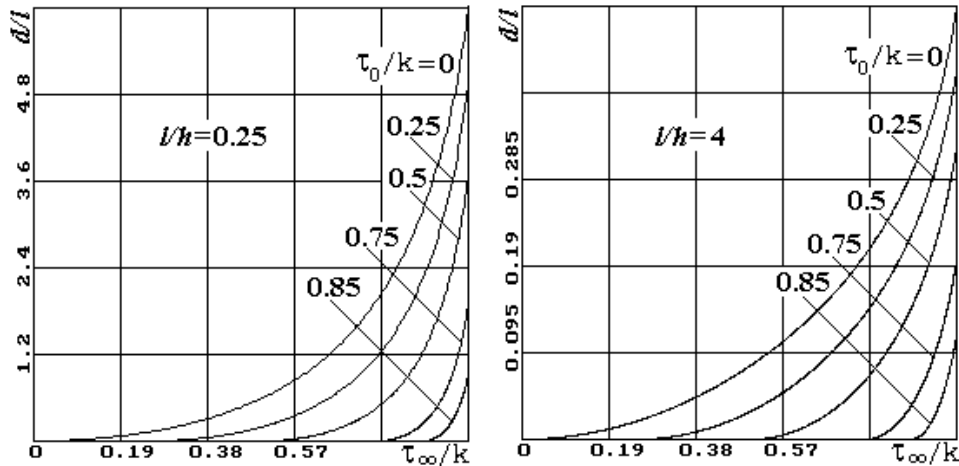


Рис. 3.

трещин и расстояний  $2h$  между ними приведены на рис. 3.

Полученные результаты позволяют применять деформационные критерии разрушения в случае локализации пластических деформаций в одной или нескольких полосах пластичности у вершин трещин сдвига, берега которых испытывают влияние сил трения при раскрытии трещины.

В.А. Кривень **Розвиток смуг пластичності при зсуві стиснутого масиву, що містить паралельну систему тріщин.**

**РЕЗЮМЕ.** Досліджено тонкосмугову локалізацію пластичних деформацій біля вершин паралельної системи рівних і рівновіддалених тріщин зсуву в стиснутому масиві. Враховано вплив сил тертя берегів при розкритті тріщин. Обґрунтовано можливість моделювання пластичних деформацій при вершині тріщини одною пластичною смугою. Отримано залежності довжин смуг від величини навантаження і рівня сили тертя берегів тріщини.

V.A. Kryven **Plasticity bands development at the shear of the pressed massif with parallel system of cracks.**

**SUMMARY.** Thinband localization of plastic deformations at the vertexes of parallel system of equal and equal distant cracks at the shear in the pressed massif is investigated. A banks friction forces influence at the crack opening is taken into account. A possibility of plastic deformation modeling at crack vertex by one plastic band is substantiated. Bands lengths dependences as functions of load magnitude and crack banks friction force level is received.

#### Список использованной литературы

1. Дударев Е.Ф., Почивалова Г.П., Бакач Г.П. Масштабные уровни потери сдвиговой устойчивости на стадии зарождения, формирования и распространения полос Людерса-Чернова // Физическая мезомеханика. – 1999. – Т. 2, №1-2. – С. 105-114.
2. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. - М.: Изд-во ИЛ. – 1954. – 647 с.
3. Кривень В.А. Узагальнене представлення зони пластичності при антиплоскій деформації пружнопластичного тіла із гострокінцевим концентратором напружень // Доп. АН УРСР. Сер.А. – 1983. – №2. – С.31–34.
4. Черепанов Г.П. О проблеме неединственности в теории пластичности // Доклады АН СССР. – 1974. – Т. 218, №4. – С. 779-782.
5. Райс Дж. Локализация пластических деформаций // Теоретическая и прикладная механика // Труды XIV междунар. конгресса IUTAM /Под ред. Койтера В.Т. М.: Мир. – 1979. – С.439 – 471.
6. Кривень В.А. Влияние трения берегов на локализацию пластических деформаций в плоскости трещины продольного сдвига // Динамические системы. – 2001. – Т.17. – С.137-142.
7. Кривень В.А. Непрерывное и разрывное решения упругопластической задачи об антиплоской деформации тела с трещиной // Физ. -хим. мех. материалов. – 1985. – №6. – С.10 – 16.

Поступила в редколлегию 16.07.03