МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.6

Ю.Б. ИВАНОВ, канд.физ.-мат.наук, Таврический нац. ун-т

БИЛИНЕЙНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ФОРМЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРНОГО ПУЧКА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Рассматривается спектральная задача для операторного пучка, возникающего при исследовании длинноволновых свободных колебаний однородной вращающейся жидкости. Построен соответствующий пучок непрерывных билинейных форм. Доказывается эквивалентность спектральных задач для операторного пучка и пучка билинейных форм. Доказано, также, что в случае существования гладких решений, спектральная задача для операторного пучка может быть представлена в виде краевой задачи для системы дифференциальных уравнений второго порядка.

При решении ряда экологических проблем для Черного моря, см., например, [1], вычислительные эксперименты по изучению длинноволновых процессов во вращающейся жидкости проводятся на основе математических моделей различного уровня сложности. В работе [2] математическая модель представляет собой операторный пучок полиномиального типа с неограниченными линейными операторными коэффициентами. При численном решении спектральных задач для таких операторных пучков важно уметь ставить их в слабой вариационной форме, то есть уметь составлять уравнения для соответствующего пучка билинейных форм. Проекции этих уравнений на конечномерные подпространства (метод конечных элементов [3]) используются затем для создания эффективных вычислительных алгоритмов при численном решении исходных спектральных задач.

Целью данной работы является формулировка и исследование слабой вариационной формы спектральной задачи для операторного пучка, определяющего длиннопериодные свободные колебания

ISSN 0203-3755. Динам. системы, 2004, Вып. 18

тонкого слоя идеальной однородной вращающейся жидкости, рассмотренного в работах [2], [4].

Спектральная задача для пучка билинейных форм. Покажем, что уравнению с неограниченными (в гильбертовом пространстве интегрируемых с квадратом функций $L_2(G)$) операторными коэффициентами, рассмотренному в работах [2], [4],

$$(l^3E - l(L + a^2E) + aM)x = 0,\ a > 0, \tag{1}$$

с областью определения

$$l \in R,\ l(l^2 - a^2) \neq 0,\ x \neq 0,$$

$$l \in R \qquad x \in D(L + a^2E) \subset H^1(G) \subset \overset{C}{\rightarrow} L_2(G), \tag{2}$$

может быть сопоставлена некоторая симметрическая билинейная форма, непрерывная на $H^1(G) \oplus H^1(G)$, где $H^1(G)$ - гильбертово пространство обобщенных производных первого порядка, компактно вложенное в $L_2(G)$, и сформулирована соответствующая эквивалентная спектральная задача.

Зададим на $H^1(G) \oplus H^1(G)$ следующие непрерывные симметричные формы

$$[x,h]_M = \iint_G H(x,y)\left[\left(\frac{\partial x_2}{\partial y}\frac{\partial h_1}{\partial x} - \frac{\partial x_2}{\partial x}\frac{\partial h_1}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial x_1}{\partial y}\frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\partial x_1}{\partial x}\frac{\partial h_2}{\partial y}\right)\right]ds, \tag{3}$$

$$[x,h]_F = \iint_G H(x,y)\left[\left(\frac{\partial x_1}{\partial x}\frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial x_1}{\partial y}\frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{\partial x_1}{\partial x}\frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial x_1}{\partial y}\frac{\partial h_1}{\partial y}\right) + a^2(x_1h_1 + x_2h_2)\right]ds \tag{4}$$

и докажем следующее

Утверждение 1. Решение уравнения (1) эквивалентно отысканию такой спектральной пары (l,x), $l \in R$, $x \in D(L + a^2E)$, что для любого $h \in H^1(G)$ выполняется тождество

$$l^3(x,h)_{L_2(G)} - l[x,h]_F + a[x,h]_M = 0. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть пара (l,x) – решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2). Умножая левую и правую часть уравнения (1) скалярно в $L_2(G)$ на вектор, приходим к равенству

$$l^3(x,h)_{L_2(G)} - l((L+a^2E)x,h)_{L_2(G)} + a(Mx,h)_{L_2(G)} = 0. \qquad (6)$$

Как доказано в работе [4], процесс расширения симметрического дифференциального оператора **M** для смешанных производных приводит к тождеству

$$(Mx,h)_{L_2(G)} \equiv [x,h]_M. \qquad (7)$$

Расширение симметрического полуограниченного дифференциального оператора **L**, содержащего вторые производные, приводит к тождеству

$$((L+a^2E)x,h)_{L_2(G)} \equiv [x,h]_F. \qquad (8)$$

Учитывая равенства (7) и (8), равенство (6) запишем в виде

$$l^3(x,h)_{L_2(G)} - l[x,h]_F + a[x,h]_M = 0.$$

Таким образом, если (l,x) есть решение уравнения (1), то эта спектральная пара является решением уравнения (5).

Пусть теперь (l,x) - решение уравнения (5), то есть равенство (5) выполняется для любого $h \in H^1(G)$. В силу тождеств (7) и (8), (l,x) будут удовлетворять для любого $h \in H^1(G)$ равенству (6), которое можно записать в виде

$$(l^3x - l(L+a^2E)x + aMx, h) = 0.$$

Так как $H^1(G)$ всюду плотно в $L_2(G)$, то спектральная пара (l,x) будет решением уравнения (1).

Таким образом, доказано, что спектральная задача для операторного пучка (1) и спектральная задача для пучка симметричных билинейных форм (5) эквивалентны.

Дифференциальная форма спектральной задачи. Докажем следующее

Утверждение 2. Предположим, что (l,x) есть гладкое решение задачи (1-2), то есть вектор-функция x, например, дважды непрерывно дифференцируема. Тогда (l,x) есть решение следующей дифференциальной краевой задачи: компоненты вектор-функции $x = (x_1(x,y), x_2(x,y))^T$ и скаляр l во внутренних точках $(x,y) \in G$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
& l\left(\frac{\partial}{\partial x}H\frac{\partial x_1}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}H\frac{\partial x_1}{\partial y}\right)-a\left(\frac{\partial}{\partial x}H\frac{\partial x_2}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}H\frac{\partial x_2}{\partial x}\right)+ \\
& +l\,(l^2-a^2)x_1=0 \\
& l\left(\frac{\partial}{\partial x}H\frac{\partial x_2}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}H\frac{\partial x_2}{\partial y}\right)+a\left(\frac{\partial}{\partial x}H\frac{\partial x_1}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}H\frac{\partial x_1}{\partial x}\right)+ \\
& +l\,(l^2-a^2)x_2=0,
\end{aligned} \tag{9}
$$

вектор-функция x и скаляр l в граничных точках $(x,y)\in\Gamma$ области G удовлетворяют уравнениям

$$
\begin{aligned}
& H\left[l\left(\frac{\partial x_1}{\partial x}n_x+\frac{\partial x_1}{\partial y}n_y\right)-a\left(\frac{\partial x_2}{\partial y}n_x-\frac{\partial x_2}{\partial x}n_y\right)\right]=0 \\
& H\left[l\left(\frac{\partial x_2}{\partial x}n_x+\frac{\partial x_2}{\partial y}n_y\right)+a\left(\frac{\partial x_1}{\partial y}n_x-\frac{\partial x_1}{\partial x}n_y\right)\right]=0.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Доказательство. Умножая левую и правую часть уравнения (1) скалярно в $L_2(G)$ на произвольный вектор $h\in H^1(G)$, приходим, на основании **Утв.1**, к эквивалентному уравнению (5). Преобразуем билинейные формы в уравнении (5), применяя известную формулу интегрирования по частям

$$
\iint_G u\frac{\partial w}{\partial x_i}\,ds=\int u\cdot w\cdot n_i d_m-\iint_G w\frac{\partial u}{\partial x_i}\,ds, \tag{11}
$$

где u,w – произвольные функции из $C^1(G)$; $x_1=x$, $x_2=y$; $n_1=n_x$, $n_2=n_y$ - компоненты нормали $\vec{n}=(n_x,n_y)$ к границе Γ.

Для гладких функции $x\in C^2(G)$, $H\in C^1(G)$ имеем следующие равенства:

$$
\iint_G H\left[-l\left(\frac{\partial x_1}{\partial x}\frac{\partial h_1}{\partial x}+\frac{\partial x_1}{\partial y}\frac{\partial h_1}{\partial y}\right)\right]ds=
$$

$$
=\iint_G\left[l\left(\frac{\partial}{\partial x}H\frac{\partial x_1}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}H\frac{\partial x_1}{\partial y}\right)\right]h_1 ds-\int_\Gamma H\left[l\left(\frac{\partial x_1}{\partial x}n_x+\frac{\partial x_1}{\partial y}n_y\right)\right]h_1 dm,
$$

$$
\iint_G H\left[-l\left(\frac{\partial x_2}{\partial x}\frac{\partial h_2}{\partial x}+\frac{\partial x_2}{\partial y}\frac{\partial h_2}{\partial y}\right)\right]ds=
$$

$$=\iint\limits_G\left[\;l\left(\frac{\partial}{\partial x}H\,\frac{\partial x_2}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}H\,\frac{\partial x_2}{\partial y}\right)\right]h_2ds-\int\limits_\Gamma H\left[\;l\left(\frac{\partial x_2}{\partial x}n_x+\frac{\partial x_2}{\partial y}n_y\right)\right]h_2dm,$$

$$\iint\limits_G H\left[a\left(\frac{\partial x_2}{\partial y}\frac{\partial h_1}{\partial x}-\frac{\partial x_2}{\partial x}\frac{\partial h_1}{\partial y}\right)\right]ds=$$

$$=\iint\limits_G\left[-a\left(\frac{\partial}{\partial x}H\,\frac{\partial x_2}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}H\,\frac{\partial x_2}{\partial x}\right)\right]h_2ds+\int\limits_\Gamma H\left[a\left(\frac{\partial x_2}{\partial y}n_x-\frac{\partial x_2}{\partial x}n_y\right)\right]h_1dm,$$

$$\iint\limits_G H\left[-a\left(\frac{\partial x_1}{\partial y}\frac{\partial h_2}{\partial x}-\frac{\partial x_1}{\partial x}\frac{\partial h_2}{\partial y}\right)\right]ds=$$

$$=\iint\limits_G\left[a\left(\frac{\partial}{\partial x}H\,\frac{\partial x_1}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}H\,\frac{\partial x_1}{\partial x}\right)\right]h_2ds+\int\limits_\Gamma H\left[-a\left(\frac{\partial x_1}{\partial y}n_x-\frac{\partial x_1}{\partial x}n_y\right)\right]h_2dm.$$

С учетом этих равенств, уравнение (5) для гладкой функции x представимо в виде

$$\iint\limits_G\left[\;l\left(\frac{\partial}{\partial x}H\,\frac{\partial x_1}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}H\,\frac{\partial x_1}{\partial y}\right)-a\left(\frac{\partial}{\partial x}H\,\frac{\partial x_2}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}H\,\frac{\partial x_2}{\partial x}\right)+\right.$$
$$\left.+\;l\,(l^2-a^2)x_1\right]h_1ds+$$
$$+\iint\limits_G l\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}H\,\frac{\partial x_2}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}H\,\frac{\partial x_2}{\partial y}\right)+a\left(\frac{\partial}{\partial x}H\,\frac{\partial x_1}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}H\,\frac{\partial x_1}{\partial x}\right)+\right.$$
$$\left.+\;l\,(l^2-a^2)x_2\right]h_2ds-$$
$$-\int\limits_\Gamma H\left[\;l\left(\frac{\partial x_1}{\partial x}n_x+\frac{\partial x_1}{\partial y}n_y\right)-a\left(\frac{\partial x_2}{\partial y}n_x+\frac{\partial x_2}{\partial x}n_y\right)\right]h_1dm-$$
$$-\int\limits_\Gamma H\left[\;l\left(\frac{\partial x_2}{\partial x}n_x+\frac{\partial x_2}{\partial y}n_y\right)+a\left(\frac{\partial x_1}{\partial y}n_x-\frac{\partial x_1}{\partial x}n_y\right)\right]h_2dm=0 \qquad (12)$$

Равенство (12) справедливо для любых функций $h_1,h_2\in H^1(G)$. Так как элементы пространства $H^1(G)$ всюду плотны в $L_2(G)$, то из уравнения (12) следует, что l, x_1, x_2 являются решениями дифференциальной краевой задачи (9-10), что требовалось доказать.

Выводы. Доказана эквивалентность спектральной задачи (1)-(2) для пучка, определяющего длинноволновые колебания однородной вращающейся жидкости, и спектральной задачи (5) для соответствующего пучка билинейных форм. Доказано, также, что если решения этих спектральных задач дважды непрерывно дифференцируемы в области их определения, то они удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (9) и граничным условиям (10).

Построенный в данной работе пучок билинейных форм (5) позволяет использовать известные проекционные методы, например, метод конечных элементов [3], для численного решения как исходной задачи (1)-(2), так и краевой задачи (9)-(10) для сложной системы дифференциальных уравнений.

Ю.Б. Іванов. **Білінійна та диференційна форми спектральної задачі.**

РЕЗЮМЕ. Розглядається спектральна задача для операторної в'язки, яка виникає при дослідженні довгохвильових вільних коливань однорідної рідини,що обертається. Побудовано відповідний пучок неперервних білінійних форм. Доводиться еквівалентність спектральних задач для операторної в'язки і в'язки білінійних форм. Доведено, що у випадку існування гладких рішень, спектральна задача для операторної в'язки може бути представлена у вигляді крайової задачі для системи диференційних рівнянь другого порядку.

Ivanov Yu.B. **Bilinear and differential forms of spectral problem for operator pencil of rotating homogeneous liquid.**

SUMMARY. Spectral problem for operator pencil of rotating homogeneous liquid is considered. Associated pencil of continuous bilinear forms is constructed. Equivalence of a spectral problem for the operator pencil and a spectral problem for the pencil of continuous bilinear forms is proved. When exist smooth solutions of the spectral problem for the operator pencil a related spectral problem as a boundary problem for a differential system is formulated.

Список использованной литературы

1. Вольцингер Н.Е., Демиров Е.К., Каган Б.А. Резонансное усиление длинноволновых возмущений на северо-западном шельфе Черного моря // ДАН СССР -1991.-Том 320. N2.-С.456-460.
2. Иванов Ю.Б. Моделирование баротропных сейш в Черном море. // Доп. НАН України.- 1999. - №6. - С.117-120.
3. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. -М.: Мир, 1977.- 347с.
4. Иванов Ю.Б. Обобщенные решения спектральной краевой задачи для системы уравнений теории мелкой воды. // Ученые записки ТНУ. Серия «Математика, Механика, Информатика». - 2001, том 14 (53), №1. - С. 43-50.

Поступила в редколлегию 07.04.03