УДК 519.85

О.О. ЄМЕЦЬ, докт. фіз.-мат. наук., Т.В. ЧІЛІКІНА, асистент Полт.НТУ

НЕЛІНІЙНІ ЗАДАЧІ ЕВКЛІДОВОЇ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ НА ВЕРШИННО РОЗТАШОВАНИХ МНОЖИНАХ ТА ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

У статті представлено алгоритм розв'язування умовних комбінаторних задач оптимізації на вершинно розташованих множинах.

Нехай $E \subset R^k$ – евклідова комбінаторна множина (е-множина) [1], та нехай задано функціонал $\Phi : E \to R^1$, який відображає евклідову комбінаторну множину на множину дійсних чисел R^1. Позначимо J_n – множину перших n натуральних чисел, а $J_0 = \varnothing$. Використовуємо термінологію з [1].

Основною задачею евклідової комбінаторної оптимізації (е-задачею) називається [1] знаходження $\Phi(x^*)$, x^*, де

$$\Phi(x^*) = \operatorname*{extr}_{x \in E} \Phi(x), \tag{1}$$

$$x^* = \arg \operatorname*{extr}_{x \in E} (\Phi(x)) \tag{2}$$

при обмеженнях

$$\Psi^i(x) \le 0 \quad \forall i \in J_r, \tag{3}$$

$$\Psi^{r+i}(x) = 0 \quad \forall i \in J_s, \tag{4}$$

де r, s - задані цілі невід'ємні сталі, функції $\Psi^j : E \to R^1$ $\forall i \in J_{r+s}$ задані.

Задачу (1)-(4) називають повністю комбінаторною. Частково комбінаторною називають задачу евклідової комбінаторної оптимізації вигляду: знайти пару $\langle H(y^*), y^* \rangle$, де

$$H(y^*) = \operatorname*{extr}_{x \in E} H(y), \tag{5}$$

$$y^* = \arg \operatorname*{extr}_{x \in E} H(y), \tag{6}$$

при обмеженнях

$$\Psi^{i}(y)\le 0\ \ \forall i\in J_{r}, \tag{7}$$

$$\Psi^{r+i}(y)\le 0\ \ \forall i\in J_{s}, \tag{8}$$

r,s – задані невід'ємні константи, $x=(x_1,...,x_k)\in R^k$, $y=(x_1,...,x_k,y_{k+1},...,y_m)\in R^m$, $m\ge k$, $H(y)$, $\Psi^i(y)\ \forall i\in J_{r+s}$ – задані функції m змінних.

Змінні $x_1,...,x_k$ називають комбінаторними, $y_{k+1},...,y_m$ – неперервними. Обмеження (3), (4) та (7), (8) називають додатковими (до комбінаторних: $x\in E$).

Якщо $r+s=0$, то задачі (1)-(4); (5)-(8) називають безумовними задачами евклідової комбінаторної оптимізації (повністю та частково комбінаторними відповідно), інакше їх називають умовними евклідовими задачами комбінаторної оптимізації.

Якщо функції $\Phi(x),\Psi^i(x);\ H(y),\Psi^i(y)\forall i\in J_{r+s}$ – лінійні, то задачі (1)-(4); (5)-(8) називають лінійними задачами евклідової комбінаторної оптимізації. Якщо хоча б одна з цих функцій не є лінійною, то відповідну задачу називають нелінійною.

Позначимо $vertM$ – множину вершин многогранної множини M, а $convM$ – опуклу оболонку множини M .

Означення. Евклідову комбінаторну множину E, яка має властивість

$$\mathrm{E}=\mathrm{vert\ conv\ E}, \tag{9}$$

назвемо вершинно розташованою множиною.

Вершинно розташованими є, як відомо [1-5], множини переставлень без повторень, парних переставлень, переставлень з j-ою забороною; загальні множини переставлень; загальні множини поліпереставлень; деякі множини розміщень та полірозміщень та інші. Зауважимо, що для названих вершинно розташованих множин відомі і їх опуклі оболонки у вигляді систем лінійних обмежень [1-6], а в певних випадках відомі й незвідні такі системи [7-9].

В роботах [1,4,5,7,11] розглядаються задачі оптимізації на комбінаторних множинах в тому числі на вершинно розташованих. Ефективних методів розв'язування нелінійних задач на евклідових комбінаторних множинах не має, тому розробка та дослідження методів та алгоритмів розв'язування задач з нелінійними цільовими функціями є важливою і актуальною.

При дослідженні підходів до побудови алгоритмів розв’язування таких задач важливими є роботи [1-9], які дають опуклі оболонки комбінаторних множин.

Зауважимо таке, якщо цільова функція в (1), (2), (5), (6) нелінійна, то можна перейти до еквівалентної е-задачі з лінійною цільовою функцією. Нехай, для визначеності, розглядається випадок максимізації цільової функції f. Тоді, ввівши змінну Z та обмеження $Z \le f$, при максимізації Z отримаємо максимум f. Отже, досліджуючи нелінійні задачі евклідової комбінаторної оптимізації, не обмежуючи загальності міркувань, можемо розглядати задачі, що мають нелінійні функції тільки серед функцій додаткових обмежень.

Розглянемо нелінійну задачу евклідової комбінаторної оптимізації на вершинно розташованій множині, тобто задачу вигляду: знайти

$$f^* = f(x^*) = \max_{x \in R^m} f(x), \tag{10}$$

$$x^* = \arg\max_{x \in R^m} f(x), \tag{11}$$

де

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j \tag{12}$$

при комбінаторному обмеженні

$$x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in E \in R^k \tag{13}$$

та додаткових не комбінаторних обмеженнях:

$$p_i(x) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j + b_i \ge 0,\ i \in J_r, \tag{14}$$

$$q_i(x) \ge 0,\ i \in J_s, \tag{15}$$

тут $c_i, a_{ij}, b_i\ \forall i, j$ – задані дійсні числа, m, k, s – задані натуральні числа, задане r – ціле невід’ємне число, $q_i(x)$ – задані нелінійні функції, а задана евклідова комбінаторна множина E є вершинно розташованою, тобто має властивість (9).

Завдання даної роботи є побудова алгоритму розв’язування задачі (10)-(15).

Розглянемо схему алгоритму розв’язування задачі (10)-(15).

1. Розв'язується задача без обмежень на множині E, тобто задачі (10)-(13). Зауважимо, що розв'язки лінійних безумовних задач евклідової комбінаторної оптимізації відомі для багатьох вершинно розташованих ***е***-множин (див., наприклад [1]). Точку, що дає розв'язок позначимо x^*.
2. Перевіряємо, чи задовольняє x^* лінійним обмеженням (14) вихідної задачі, якщо „так" – то перехід на пункт 6.
3. Розв'язуємо задачу лінійного програмування (цільова функція (10)-(12) та лінійні додаткові обмеження (14) вихідної задачі та лінійні обмеження опуклої оболонки convE). Точку, що дає розв'язок цієї задачі позначимо x^*.
4. Перевіримо, чи задовольняє перші k координат $y^* = (x_1^*,...,x_k^*)$ точки x^* умові $y^* \in E$, якщо „так" – то перехід на п.6.
5. Застосуємо до задачі з поточними лінійними обмеженнями метод комбінаторного відсікання [10, 11]. Точку, що отримуємо в результаті розв'язування позначимо x^*.
6. Перевіряємо, чи справджується в точці x^* нелінійні обмеження (15) вихідної задачі. Якщо „так", то перехід на п.10.
7. Застосовуємо метод відсікаючи площин Келлі (див., наприклад [12]). Точку, що дає розв'язок задачі позначимо x^*, а її перші k координат $y^* = (x_1^*,...,x_k^*)$.
8. Перевіряємо, чи $y^* \in E$. Якщо „так", то перехід на п.10.
9. Модифікуємо систему лінійних обмежень поточної задачі (добавляємо лініаризовані нелінійні обмеження, видаляємо ті, для яких виконується критерій можливості відкидання обмежень [12]). Перехід на п.5.
10. Роздруковується отриманий розв'язок. Зупинка алгоритму.

Зауважимо, що для збіжності методу необхідно виконання умови збіжності методу Келлі – опуклість області, що задається системою нелінійних обмежень. Оскільки $|\mathrm{vert\ convE}| < \infty$, то це разом з опуклістю названої області забезпечує збіжність запропонованого методу.

На малюнку наведено блок-схему алгоритму.

Для задач даного типу алгоритим застовується вперше, що й складає його наукову новизну. З відомих підходів до них може бути застосований тільки метод гілок та меж впорядкованого перебору.

Перспективним є дослідження поведінки алгоритму та його особливостей під час проведення числових експериментів, а також вивчення можливості теоретичної оцінки його ефективності.

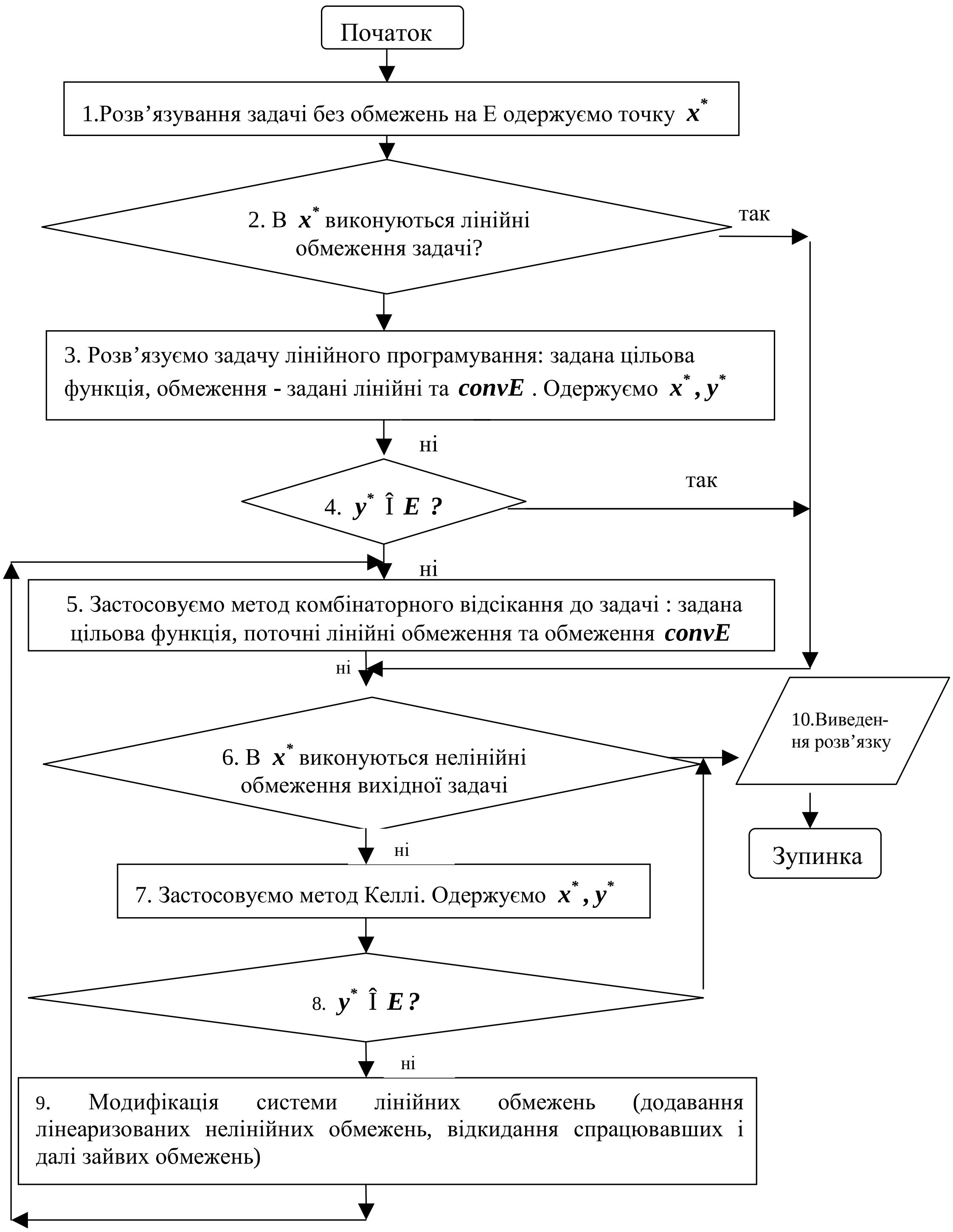

Рис. Блок-схема алгоритму розв'язування задачі (10)-(15)

О.А.Емец, Т.В.Чиликина. **Нелинейные задачи евклидовой комбинаторной оптимизации на вершинно расположенных множествах и их решение.**

РЕЗЮМЕ. В статье представлен алгоритм решения условных комбинаторных задач оптимизации на вершинно расположенных множествах.

O.O.Yemets, T.V.Chilikina. **Nonlinear tasks of combinatorials optimization problems on the sets, located on the verticals and their solving.**

SUMMARY. In the article the algorithm of the solution of conditional combinatorials optimization problems on the sets, located on the verticals,is considered.

Список использованной литературы

1. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. – К.: ІСДО, 1993. –188с.
2. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация, – М.:Наука, 1981. – 344.
3. Стоян Ю.Г., Гребенник И.В., Емец О.А. Комбинаторные множества размещений и их свойства. – Харьков, 1990. – 38с. (Препринт АН УССР / Ин-т пробл. машиностроения; 324).
4. Емец О.А. Евклидовы комбинаторные множества и оптимизация на них. Новое в математическом программировании. – К.:УМК ВО, 1992. –92с.
5. Стоян Ю.Г., Ємець О.О., Ємець Є.М. Множина полірозміщень в комбінаторній оптимізації //Доповіді НАНУ. – 1999. – №1. – С.100-106.
6. Ємець О.О., Колєчкіна Л.М. Задача оптимізації на переставленнях з дробово-лінійною функцією: властивості множини допустимих розв'язків // Україн. матем. журн.–2000. –Т.52. –№12. – С.1630-1640.
7. Ємець О.О. Недобачій С.І. Загальний переставний многогранник: незвідна система лінійних обмежень та рівняння всіх гіперграней// Наукові вісті НТУУ „КПІ". –1998. –№1. – С.100-106.
8. Ємець О.О., Колєчкіна Л.М., Недобачій С.І. Дослідження областей визначення задач евклідової комбінаторної оптимізації на переставних множинах. – Полтава: ПДТУ,1999. –Ч.1–64с.; ч.2–32с.
9. Емец О.А. Недобачий С.И., Колечкина Л.Н. Неприводимая система ограничений комбинаторного многогранника в дробно-линейной задаче оптимизации на перестановках// Дискретная математика. –2001. –Т.13. –Вып.1. – С.110-118.
10. Емец О.А. Об одном методе отсечения для задач комбинаторной оптимизации // Экономика и матем. методы. –1997. – Т.33, –Вып.4. – С.120-129.
11. Ємець О.О, Ємець Є.М. Відсікання в лінійних частково комбінаторних задачах евклідової комбінаторної оптимізації // Доповіді НАНУ. – 2000. – №9. – С.105-109.
12. Г. Реклейтис, А. Рейвиндран, К. Рэгсдел Оптимизация в технике: В 2-х кн.. Кн.1–М.: Мир,1986. –351с.

Поступила в редколлегию 21.08.03