

А.И. БОХОНСКИЙ, д-р техн. наук, проф. Севастоп. нац. техн. ун-т

УПРАВЛЕНИЕ ПЕРЕНОСНЫМ ДВИЖЕНИЕМ УПРУГИХ СИСТЕМ

Найдено оптимальное переносное перемещение упругих систем из начального в конечное состояние абсолютного покоя и исследованы относительные колебания, обусловленные этим движением.

Колебания линейных систем изучены в [1,2]. Новые закономерности колебаний все еще можно выявить при исследовании переносного движения, порождающего колебания. В [3,4] обращено внимание на существование таких оптимальных переносных движений, которые обеспечивают абсолютный покой объектов в конечном положении.

В статье приведены решения задач переносного движения упругих систем в следующей постановке. Во временном интервале, согласующемся с периодами колебаний упругой системы, найти такие законы переносного движения, при которых исключаются колебания в конечном состоянии. Рассмотрены характерные примеры.

Пример 1. Уравнение относительного движения (Рис.1):

$$\frac{d^2 x_r}{dt^2} + k^2 x_r = -U_e(t), \quad (1)$$

где $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ - частота собственных колебаний; c - коэффициент жесткости; m - масса; $U_e(t)$ - ускорение переносного движения.

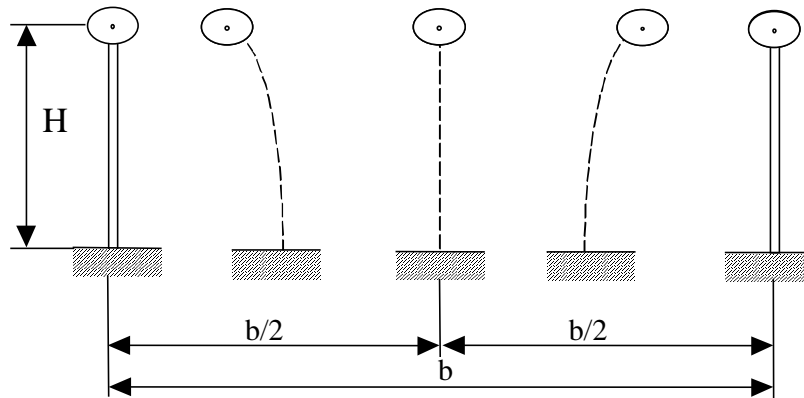


Рис. 1 Схема движения системы с одной степенью свободы

Поиск управления $U_e(t)$ для перемещения из начального состояния упругой системы в конечное состояние абсолютного покоя и соответствующего управлению закона относительного движения $x_r(t)$ с допущением колебаний внутри временного интервала ($t_1 \geq t \geq 0$) осуществлялся с использованием алгебраических полиномов, коэффициенты которых находились из краевых условий (для относительного и переносного движений). При решении системы алгебраических уравнений использовалась компьютерная алгебра [5]. Анализ и обобщение результатов показали, что полином $U_e(t)$ является рядом Тейлора аналитической функции.

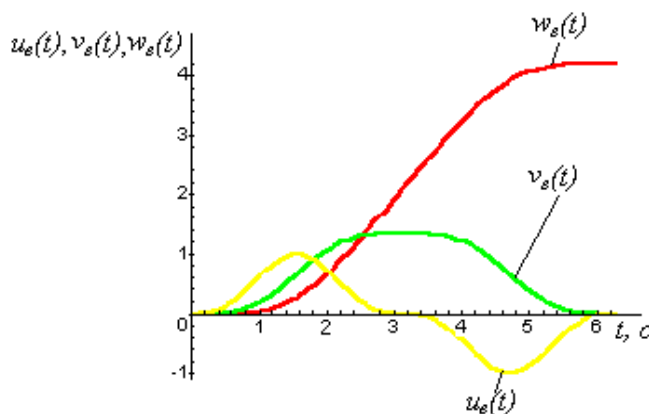


Рис.2 Графики управления, скорости и перемещения в переносном движении системы

Получено (с использованием REDUCE и Maple V) следующее управление:

$$U_e(t) = \frac{2pb}{t_1^2} \sin^{2n-1} \left(\frac{kt}{n} \right), \quad (2)$$

где $n = 2, 3, 4, \dots$; k – частота собственных колебаний; b – максимальное перемещение. С целью упрощения анализа поведения системы решение (1) осуществлялось с правой частью:

$$U_e(t) = a \sin^3 \left(\frac{kt}{2} \right), \quad (3)$$

где $a = 1.0 \text{ м/с}^2$; $k = 2.0 \text{ с}^{-1}$. Для максимального значения переносного ускорения следует: $a = 3pb/t_1^2$, где $t_1 = 2p/k$. Решение уравнения (1):

$$x_r(t) = \frac{1}{5} (\sin(2t) - \sin(t) \cos^2(t) - \sin(t)). \quad (4)$$

Графики $x(t)$, dx/dt , d^2x/dt^2 изображены на Рис 3. Переносное движение согласно (3) описывается зависимостями:

$$w_e(t) = \frac{1}{3}(-\sin^3(t) - 2\sin(t) + 2t);$$

$$\frac{dw_e}{dt} = \frac{1}{3}(-\sin^2(t)\cos(t) - 2\cos(t) + 2); \quad (5)$$

$$\frac{d^2w_e}{dt^2} = U_e(t) = \sin^3(t).$$

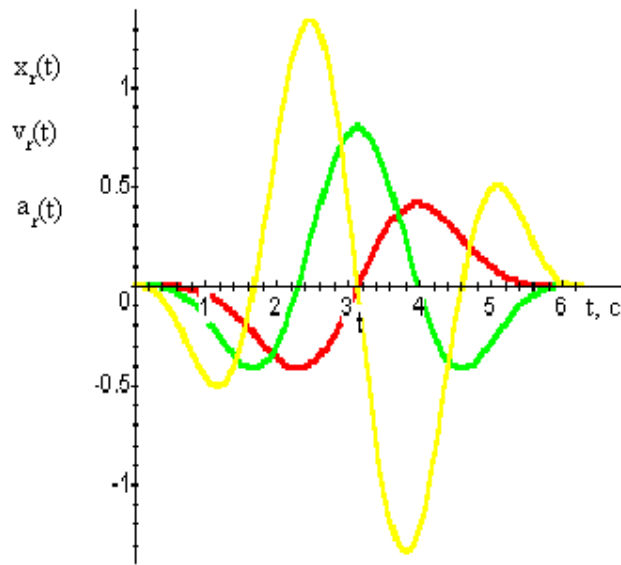


Рис. 3 Графики $x_r(t)$, $v_r(t)$, $a_r(t)$ в относительном движении

В связи с тем, что $\sin^3(t) = \frac{1}{4}(3\sin(t) - \sin(3t))$, то необходимо исключить резонанс переносного движения. Возможен согласно (2), простой закон переносного движения, который обеспечивает отсутствие колебаний в конечном состоянии. Если ускорение основания

$$U_e(t) = A \sin pt, \quad (6)$$

то скорость и перемещение переносного движения запишутся как:

$$V_e(t) = -\frac{A}{p} \cos pt + C, \quad W_e(t) = -\frac{A}{p^2} \sin pt + Ct + D. \quad (7)$$

Постоянные C и D найдены из условий:

$$t_1 = T = \frac{2p}{p}, \quad V_e\left(\frac{2p}{p}\right) = 0, \quad W_e\left(\frac{2p}{p}\right) = L, \quad (8)$$

где t_1 – время движения; L – общее перемещение в переносном движении. Из (7) и (8) следует:

$$-\frac{A}{p} + C = 0, \quad L = \frac{2pA}{p^2} + D. \quad (9)$$

С учетом $W_e(0) = 0$ находится

$$A = \frac{Lp^2}{2p}. \quad (10)$$

С использованием (9) и (10) выражения (7) и (8) записываются как:

$$U_e(t) = \frac{Lp^2}{2p} \sin pt, \quad V_e(t) = -\frac{Lp}{2p} \cos pt + \frac{Lp}{2p},$$

$$W_e(t) = -\frac{L}{2p} \sin pt + \frac{Lpt}{2p}. \quad (11)$$

В моменты времени $t = 0$ и $t = t_1$ скорость и ускорение переносного движения равны нулю (рисунок 4). Полученный закон $W_e(t)$ используется при анализе относительного движения (колебаний) систем.

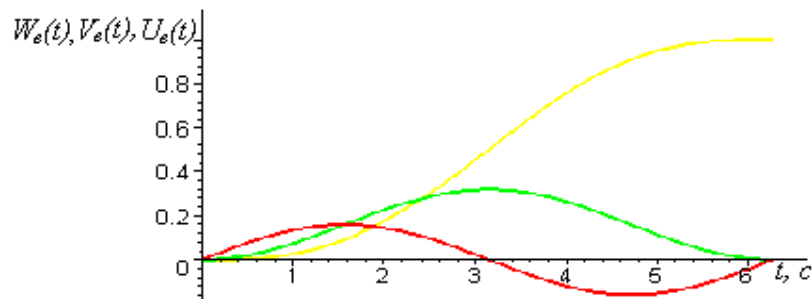


Рис. 4 Перемещение $W_e(t)$, скорость $V_e(t)$ и ускорение $U_e(t)$ в переносном движении

Уравнение относительного движения

$$\frac{d^2 x_r}{dt^2} + k^2 x_r = -A \sin pt, \quad (12)$$

где $A = \frac{Lp^2}{2p}$ - амплитудное значение ускорения основания; $p = \frac{2p}{t_1}$.

Движение начинается из состояния покоя (при $t = 0$, $x_r(0) = 0$, $\dot{x}_r(0) = 0$). Перемещение, скорость и ускорение в относительном движении:

$$x_r = \frac{A}{k^2 - p^2} \left[\frac{p}{k} \sin kt - \sin pt \right], \quad \dot{x}_r = \frac{A}{k^2 - p^2} [p \cos kt - p \cos pt],$$

$$\ddot{x}_r = \frac{A}{k^2 - p^2} [-pk \sin kt + p^2 \sin pt]. \quad (13)$$

Для исключения резонанса принято $\frac{k}{p} \geq 2$. Графики зависимостей (13) построены (Рис.5) при исходных данных: $k = 2.0 \text{ c}^{-1}$; $p = 1.0 \text{ c}^{-1}$; $A = \frac{1}{2\pi} \text{ м/с}^2$.

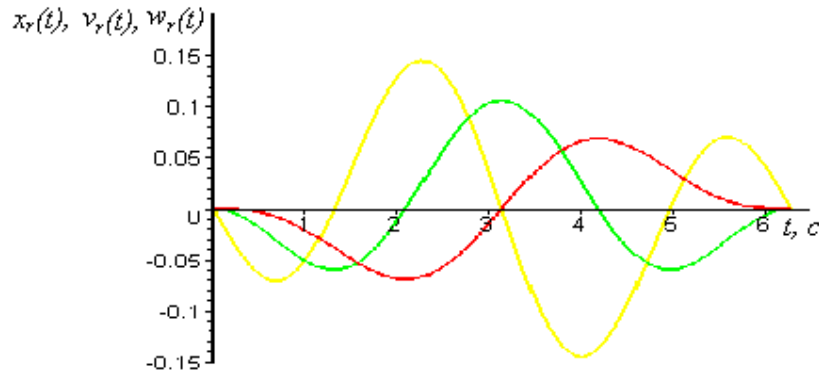


Рис. 5 Перемещение $x_r(t)$, скорость $v_r(t)$ и ускорение $w_r(t)$ в относительном движении

При $t_1 = \frac{2p}{p}$ перемещение, скорость и ускорение в относительном движении равны нулю; система движется из исходного в конечное состояние абсолютного покоя. Такие законы движения могут найти применение в манипуляторах малой жесткости.

Пример 2. Рассмотрены: оптимальное переносное вращательное движение руки манипулятора как упругой системы с конечным числом степеней свободы и вынужденные колебания руки в

процессе оптимального поворота на заданный угол j_* . Закон оптимального переносного вращательного движения принят в виде (2): $j\ddot{\alpha}(t) = e_* \sin^{2n+1}(wt)$, где e_* - амплитудное значение углового ускорения; $n = 1$; $w = \frac{p_1}{2}$, p_1 - частота первого тона изгибных колебаний руки. Схема телескопической руки изображена на Рис.6. За время движения $t_1 = \frac{2p}{w}$ рука поворачивается из состояния абсолютного покоя на угол j_* , причём для данного вращательного движения в конечном состоянии колебания руки по первой моде отсутствуют.

При моделировании динамики руки не учитывалось влияние зазоров в сочленениях на характер ее колебаний и не накладывались ограничения на собственные частоты. Для $j\ddot{\alpha}$, $j\dot{\alpha}$, j заданы краевые условия:

$$\begin{aligned} j\ddot{\alpha}(0) &= 0, \quad j\dot{\alpha}(0) = 0, \quad j(0) = 0; \\ j\ddot{\alpha}(t_1) &= 0, \quad j\dot{\alpha}(t_1) = 0, \quad j(t_1) = j_*. \end{aligned} \quad (14)$$

Использовались зависимости: $j\dot{\alpha}(t) = \int j\ddot{\alpha}(t) dt$, $j(t) = \int j\dot{\alpha}(t) dt$.

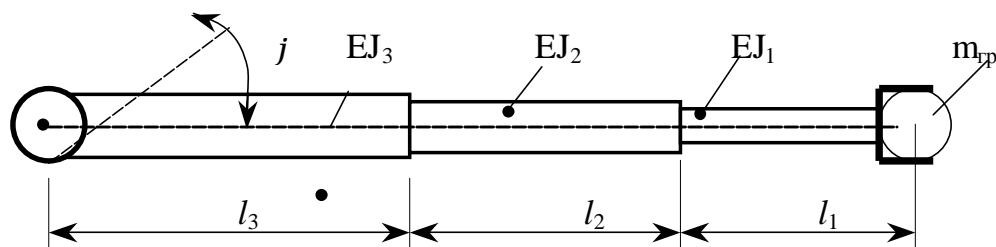


Рис. 6 Схема телескопической руки манипулятора

На основании условий (14) найдено: $e_* = 3pj_*/t_1$. Для функций, характеризующих переносное движение с учётом условий (14), следует:

$$\begin{aligned} j(t) &= j_* \left(-\sin^3(wt) - 6 \sin(wt) + 6wt \right) / 12p, \\ j\dot{\alpha}(t) &= j_* w \left(-\sin^2(wt) \cos(wt) - 2 \cos(wt) + 2 \right) / 4p, \end{aligned} \quad (15)$$

$$w(t) = \frac{3j_* w^2}{4p} \sin^3(wt) = \frac{3j_* p}{t_1^2} \sin^3(wt).$$

Зависимости (15) показывают, что и в случае вращательного движения достигается абсолютный покой в конечном состоянии.

Пример 3. Уравнение относительного движения (колебаний) при оптимальном переносном движении стержня с распределенной массой (без учета сопротивления):

$$EJ \frac{\partial^4 W_r}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 W_r}{\partial t^2} = -m U_e(t), \quad (16)$$

где EJ - жесткость при изгибе; W_r - относительное перемещение; m - распределенная масса; $U_e(t)$ - ускорение в поступательном переносном движении стержня. С использованием метода главных координат [1] решение уравнения, как известно, имеет вид

$W(x,t) = \sum_{k=1}^{k=\infty} q_k(t) n_k(x)$; после его подстановки в (16) следует:

$$\frac{d^2 q_k}{dt^2} + p^2 q_k = Q_k(t) / M_k, \quad (17)$$

где q_k - главная координата; $Q_k(t) = \int_0^l U(x,t) n_k(x) dx$ - обобщенная

сила; $M_k = \int_0^l m n_k^2 dx = ml(\operatorname{sh} l + \sin l)^2 / 16$ - обобщенная масса. Как и

раньше, в данном случае можно полностью устранить колебания в конце движения.

Следует отметить, что при выполнении условий кратности частот подавляются колебания по высшим модам.

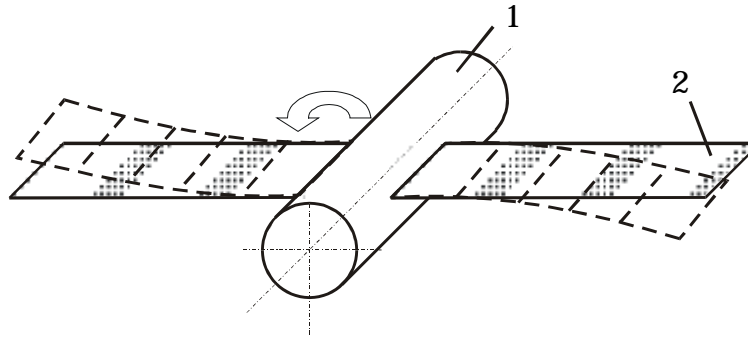


Рис. 7 - Космический объект: 1 - модуль; 2 - батареи

Результаты исследований могут использоваться: для оптимизации перемещения грузов с помощью манипуляторов минимальной массы, при разворачивании из транспортной укладки крупногабаритных конструкций и выполнении сборочных операций в космическом пространстве, при выполнении управляемых движений космическим кораблем (Рис.7) с условием исключения колебаний солнечных батарей в конечном состоянии.

А.І. Бохонский. **Керування переносним рухом пружних систем.**

РЕЗЮМЕ. Найдено оптимальний переносний рух пружних систем із початкового в кінцевий стан абсолютного спокою і досліджені відносні коливання, що зумовлені цим рухом.

A. I. Bochonsky. **The management of portable moving of elastic systems.**

SUMMARY. The optimum portable moving of elastic systems from initial in a final condition of absolute rest is found. The relative fluctuations caused by this movement are investigated.

Список использованной литературы

1. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. - М.: Высшая школа, 1972.- 416с.
2. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т.- Т.1. Колебания линейных систем/ Под. ред. В.В. Болотина.-М.: Изд-во Машиностроение, 1978.- 352с.
3. Бохонский А.И. Управляемое упругое деформирование твёрдых тел.//Сб. науч. тр./Сев. гос. техн. у-т, 1995.-Вып.1.- с.47-54.
4. Бохонский А.И. Управляемые колебательные процессы в механике. Вестник СевГТУ. Вып. 25. – Севастополь, 2000.-с.24-29.
5. Манзон Б.М. Maple V Power Edition.– М.: Инф.–Изд. дом «Филин», 1998. – 240с.

Поступила в редколлегию 03.06.03