

А.Т. БАРАБАНОВ, докт. техн. наук, С.А. КОНЕВА, Севастоп. нац. техн. ун-т

ЗАДАЧА АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА

Применением преобразования Лапласа построена модель системы автоматического регулирования конвективного теплообмена. Анализ распределения нулей характеристической функции системы и интегралов обращения для реакций позволяет полностью решить вопрос об условиях устойчивости системы.

Рассматривается система автоматического регулирования (САР) температуры в устройстве подогрева топлива пароэнергетической установки. Подогрев производится в цилиндрическом теплообменном аппарате (ТОА). Внутри цилиндра находится труба, по которой подается тепловыделяющий пар, а в межтрубном пространстве – топливо, подводимое в ТОА из расходной емкости. Теплопередача происходит за счет конвекции. Регулирование осуществляется с целью поддержания температуры топлива на выходе аппарата в заданных пределах и происходит за счет изменения расхода $G_T(t)$ тепловыделяющего пара.

Исследования конвективного теплообмена представляют собою обширную область современной теории теплопередачи [1]. Вместе с тем, математический анализ процессов в ТОА является весьма сложной, а часто и трудноразрешимой задачей. В особенности это касается проблемы анализа САР теплообменных процессов. Построение моделей САР ТОА на основе преобразования Лапласа уравнений теплообмена в частных производных (здесь речь идет о пространственно – одномерных моделях) приводит к «неординарным» изображениям переменных вне класса рациональных или мероморфных функций. В силу этого в исследованиях САР ТОА на основе преобразования Лапласа сложились два подхода. В первом модели ТОА (объект управления) в изображениях (преобразование Лапласа по времени) сводят за счет упрощений к моделям класса систем с запаздыванием. Это позволяет применить затем на строгой основе традиционные методы анализа САР ([2] и др.). Во втором сохраняются «неординарные» элементы изображений (аналитические функции с конечными существенно особыми точками, точками разветвления и др.). После построения моделей замкнутых САР в терминах передаточных функций применяются формально традиционные методы анализа САР, например, критерий устойчивости Найквиста ([3] и др.). Строго говоря, эти подходы оказываются

необоснованными и даже непригодными в достаточно важных случаях моделей ТОА. Поэтому расширение подходов и развитие теории и практики проектирования САР ТОА в широком классе моделей ТОА являются в настоящее время актуальной задачей. В настоящей работе ставится и решается задача асимптотического анализа процессов в САР ТОА, адекватного аналитической природе передаточных функций замкнутой системы.

1. Пусть $T(x, t)$ – температура топлива; x – относительная координата ($0 \leq x \leq 1$); t – время; $T(0, t)$ – температура топлива на входе ТОА; $T(1, t)$ – температура на выходе; $T_T(x, t)$ – температура тепловыделяющего элемента (пара): $T_T(0, t)$ – на входе, $T_T(1, t)$ – на выходе; расход подогреваемого топлива $G(t)$. При равномерной по длине ТОА теплоотдаче уравнения динамики теплообмена без учета тепловой инерционности стенки имеют вид [2],[3]:

$$\begin{aligned} v \frac{\partial T_T(x, t)}{\partial t} + T_T(x, t) &= a_2 G_T(t) + T(x, t), \\ \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} + b_1 \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} + b_2 T(x, t) &= b_3 T_T(x, t) - b_4 G(t) \end{aligned} \quad (1)$$

с неотрицательными постоянными коэффициентами.

Начальные и граничные условия принимаем в виде

$$\begin{aligned} T(x, 0) &= 0, \quad T_T(x, 0) = 0; \\ T(0, t) &= T_0(t). \end{aligned}$$

В данной задаче регулируемого теплообмена основной интерес представляет процесс изменения температуры топлива $T(1, t)$ на выходе ТОА. Возмущающими воздействиями являются температура топлива на входе $T(0, t)$ и расход топлива $G(t)$, управляющим воздействием – расход тепловыделяющего пара $G_T(t)$.

Преобразование Лапласа уравнений (1) по t с изображениями $T_T(x, p), T(x, p)$ дает с учетом начальных условий после исключения $T_T(x, p)$ соотношение

$$\frac{dT(x, p)}{dx} + \left(b_1 p + b_2 - \frac{b_3}{vp + 1} \right) T(x, p) = \frac{a_2 b_3}{vp + 1} G_T(p) - b_4 G(p).$$

2. Решение этого дифференциального уравнения с учетом граничного условия позволяет определить $T(x, p)$ в виде

$$T(x, p) = T_0(p) e^{-A(p)x} + \frac{a_2 b_3 [1 - e^{-A(p)x}]}{(vp + 1)A(p)} G_T(p) - \frac{b_4 [1 - e^{-A(p)x}]}{A(p)} G(p), \quad (2)$$

где

$$A(p) = b_1 p + b_2 - \frac{b_3}{vp + 1}. \quad (3)$$

При $x=1$ полученное выражение определяет изображение температуры топлива на выходе ТОВА. Нерегулируемые процессы теплообмена на основе изображений (2) рассмотрены в [4]. В настоящей работе рассматривается задача регулируемого теплообмена.

Определяя ошибку управления как $e(t) = T_3(t) - T(1,t)$, где $T_3(t)$ – заданная температура на выходе ТОВА, представим САУ структурной схемой, изображенной на рисунке 1.

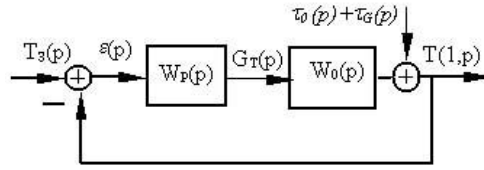


Рис.1 – Структурная схема САУ теплообмена

В соответствии с (2) передаточная функция объекта управления имеет вид

$$W_o(p) = \frac{a_2 b_3 (1 - e^{-A(p)})}{(vp + 1)(b_1 p + b_2) - b_3},$$

а приведенные возмущения в контуре управления равны

$$t_0(p) = e^{-A(p)} T_0(p), \quad t_G(p) = \frac{-b_4}{A(p)} [1 - e^{-A(p)}] G(p).$$

Передаточную функцию регулятора будем рассматривать в виде

$$W_p(p) = \frac{b(p)}{a(p)},$$

где заданные многочлены $a(p)$, $b(p)$ удовлетворяют условию

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{b(p)}{pa(p)} \neq \infty. \quad (4)$$

Определим теперь передаточную функцию прямой цепи контура как

$$W(p) = W_p(p) W_o(p) = \frac{c(p)}{q(p)} [1 - e^{-A(p)}], \quad (5)$$

где

$$c(p) = a_2 b_3 b(p), \quad q(p) = [vb_1 p^2 + (b_2 v + b_1) p + b_2 - b_3] a(p). \quad (6)$$

Будем рассматривать далее вход–выходные соотношения замкнутой системы

$$\begin{aligned} T_3(1, p) &= \Phi(p)T_3(p), & T_G(1, p) &= \Phi_G(p)G(p), \\ T_0(1, p) &= \Phi_0(p)T_0(p) \end{aligned} \quad (7)$$

– ее реакции на задающее и возмущающие воздействия (расход топлива и температуру на входе ТОА) соответственно.

Для передаточных функций замкнутой системы находим

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)} = \frac{c(p)}{Q(p)} [1 - e^{-A(p)}], \quad (8)$$

$$\Phi_G(p) = -\frac{b_4 [1 - e^{-A(p)}]}{[1+W(p)]A(p)} = \frac{-b_4(\nu p + 1)a(p)}{Q(p)} [1 - e^{-A(p)}], \quad (9)$$

$$\Phi_0(p) = \frac{e^{-A(p)}}{1+W(p)} = \frac{q(p)}{Q(p)} e^{-A(p)}. \quad (10)$$

В этих соотношениях

$$Q(p) = q(p) + c(p) [1 - e^{-A(p)}] \quad (11)$$

аналитическая функция, нули которой определяют полюсы передаточных функций (8),(9),(10). По своей роли в анализе динамики рассматриваемой САР с распределенными параметрами она аналогична характеристическому многочлену обыкновенной САР (с рациональными передаточными функциями). Поэтому далее будем ее называть характеристической функцией замкнутой САР ТОА.

Как видно из соотношений (7)-(11), особыми точками изображений переменных САР ТОА являются полюсы – нули функции $Q(p)$ и существенно особая точка $p = -1/\nu$ (см. выражение (3)).

Поставим вопрос о роли этих особых точек в асимптотике при $t \rightarrow \infty$ оригиналов изображений (7). Ответ на этот вопрос позволит нам решить и всю задачу анализа устойчивости САР ТОА.

3. Поскольку $|e^{-b_1 p}| < 1$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq 0$, то функция

$$e^{-A(p)} = e^{-b_2} e^{-b_1 p} e^{\frac{b_3}{\nu p + 1}}$$

в этой полуплоскости ограничена.

Заметим также, что в силу соотношений (6) и условия (4)

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{c(p)}{q(p)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{c(p)}{pa(p)} \frac{pa(p)}{q(p)} = 0. \quad (12)$$

Поэтому для передаточной функции (5) имеем $\lim_{p \rightarrow \infty} W(p) = 0$, $\text{Re } p \geq 0$.

значит,

$$|W(p)| < 1 \quad (13)$$

при $R = |p|$ достаточно большом. Более того,

$$W(R e^{ja}) \rightarrow 0 \quad (14)$$

при $R \rightarrow \infty$, $|a| \leq \frac{p}{2}$, $j^2 = -1$ равномерно по аргументу a .

Запишем теперь характеристическую функцию (11) в виде

$$Q(p) = q(p)[1 + W(p)]. \quad (15)$$

из оценки (13) следует утверждение

Лемма. Все нули характеристической функции (11), расположенные в правой полуплоскости, принадлежат некоторому полукругу, т.е. существует такое R_* , что при $|p| > R_*$, $\text{Re } p \geq 0$ функция нулей не имеет.

Поскольку функция (11) аналитична в правой полуплоскости, все эти нули изолированы друг от друга, а значит, в указанном полукруге находится некоторое конечное их число k .

Можно указать способ определения этого числа с помощью амплитудно-фазовой характеристики системы $W(jw)$, $-\infty < w < +\infty$.

Теорема. Пусть многочлен $q(p)$ не имеет нулей на мнимой оси ($q(jw) \neq 0, \forall w$), а r – число его нулей, расположенных строго в правой полуплоскости. Пусть не имеет чисто мнимых нулей также и характеристическая функция, т.е. $Q(jw) \neq 0$ при $\forall w$. Тогда число k нулей характеристической функции (11) строго в правой полуплоскости определяет выражение

$$k = r - \frac{1}{2\pi} \Delta \arg[1 + W(jw)]_{-\infty}^{+\infty}, \quad (16)$$

где в правой части указано приращение аргумента функции при изменении w от $(-\infty)$, до $(+\infty)$.

Доказательство. Пусть Γ_R замкнутый контур с обходом по часовой стрелке, изображенный на рисунке 2. Пусть R достаточно

велико, так что все нули функций $Q(p)$ и $q(p)$ в правой полуплоскости охватываются контуром Γ_R .

Согласно принципу аргумента

$$-\Delta \arg Q(p)|_{\Gamma_R} = 2pk, \quad (17)$$

а согласно (15)

$$\Delta \arg Q(p)|_{\Gamma_R} = \Delta \arg q(p)|_{\Gamma_R} + \Delta \arg [1 + W(p)]|_{\Gamma_R}, \quad (18)$$

причем

$$\Delta \arg q(p)|_{\Gamma_R} = -2pr. \quad (19)$$

используя соотношения (17),(18),(19) и переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$ с учетом (14), приходим к равенству (16).

Теорему можно дополнить еще одним существенным утверждением. Пусть $0 < \mathbf{1} < \frac{1}{\nu}$. введем прямую $(-\mathbf{1} - j\infty, -\mathbf{1} + j\infty)$, параллельную мнимой оси, указанную на рис. 2. имеем

$$|e^{-b_1 p}| \leq e^{b_1 \mathbf{1}}, \quad \operatorname{Re} p \geq -\mathbf{1},$$

а значит,

$$|e^{-A(p)}| \leq e^{-b_2 + b_1 \mathbf{1}} |e^{\frac{b_3}{\nu p + 1}}|.$$

Поэтому при достаточно большом R и $\operatorname{Re} p \geq -\mathbf{1}$ по-прежнему справедлива оценка (13). Это позволяет прийти к заключению, что справа от прямой $(-\mathbf{1} - j\omega, -\mathbf{1} + j\omega)$ характеристическая функция содержит конечное число нулей. Будем считать, что на указанную прямую ни один из нулей не попадает.

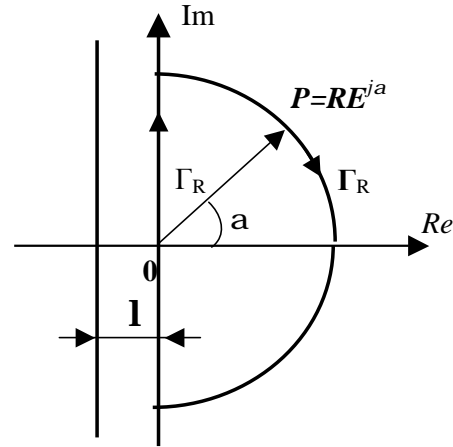


Рис.2

4. Рассмотрим реакцию системы на задающее воздействие – оригинал первого из изображений (7)

$$T(1,t) = \frac{1}{2pj} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{pt} \Phi(p) T_3(p) dp, \quad (20)$$

где контур интегрирования проходит справа от множества особых точек изображения.

Примем, что строго в правой полуплоскости изображение задающего воздействия полюсов не имеет, но некоторые из них могут находиться на мнимой оси. Например, так будет в практически интересных случаях, когда $T_3(p) = T_3/p$ и $T_3(p) = a_3 \frac{1}{p - j\omega}$, т.е. в случаях постоянного и гармонического воздействия соответственно.

Перенесем контур интегрирования в (20) на указанную прямую $(-1 - j\omega, -1 + j\omega)$ обычным приемом введения интеграла по замкнутому контуру $(c - j\Omega, c + j\Omega), (c + j\Omega, -1 + j\Omega), (-1 + j\Omega, -1 - j\Omega), (-1 - j\Omega, c - j\Omega)$ с последующим переходом к пределу $\Omega \rightarrow \infty$. в результате получим

$$T(1, t) = \sum \operatorname{res} e^{pt} \Phi(p) T_3(p) + \frac{1}{2pj} \int_{-1-j\infty}^{-1+j\infty} e^{pt} \Phi(p) T_3(p) dp, \quad (21)$$

где первое слагаемое представляет собой сумму конечного числа вычетов в нулях функции $q(p)$ (полюсах передаточной функции $\Phi(p)$) и полюсах изображения задающего воздействия, расположенных строго справа от прямой $(-1 - j\omega, -1 + j\omega)$. Пусть $l_i, i = 1, 2, \dots$ — нули характеристической функции (11) замкнутой системы, а $x_i, i = 1, 2, \dots$ — полюсы изображения задающего воздействия. Группируя вычеты по этим подмножествам точек, запишем

$$T(1, t) = T_y(1, t) + \Delta T(1, t), \quad (22)$$

где

$$T_y(1, t) = \sum_i \operatorname{res}_{s=x_i} e^{pt} \Phi(p) T_3(p), \quad (23)$$

$$\Delta T(1, t) = \sum_i \operatorname{res}_{s=l_i} e^{pt} \Phi(p) T_3(p) + e^{-lt} m(t), \quad (24)$$

$$|m(t)| \leq g = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(-1 + j\omega) T_3(-1 + j\omega)| d\omega. \quad (25)$$

Последнее соотношение следует из оценки интеграла в (21) после замены переменной $p = -1 + j\omega$. Сходимость интеграла в (25) следует из того, что в силу (8), (12)

$$\lim_{w \rightarrow \infty} (1^2 + w^2) |\Phi(-1 + j\omega) T_3(-1 + j\omega)| \neq \infty.$$

При постоянном и гармоническом задающих воздействиях ($m_3(t) = t_3$ и $T_3(t) = a_3 e^{j\omega t}$) первое слагаемое в (22) принимает вид $T_y(1, t) = \Phi(0) T_3$, $T_y(1, t) = \Phi(j\omega) a_3 e^{j\omega t}$ соответственно.

Поэтому как в этих, так и в общем случае процесс (23) естественно назвать установившимся, когда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta T(1, t) = 0. \quad (26)$$

Равенство (26) можно принять за определение устойчивости замкнутой системы, возмущаемой задающим воздействием. Как следует из соотношения (24), для того, чтобы система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы характеристическая функция (11) не имела бы нулей на мнимой оси и нулей, расположенных строго в правой полуплоскости. При этом в силу равенства (24) имеет место экспоненциальная асимптотическая устойчивость. Действительно,

$$|T(1, t) - T_y(1, t)| < g e^{-at}, \quad a = \min(I, \mathbf{1}) > 0,$$

где $I = \min_i(-\operatorname{Re} I_i)$, $g > 0$ - некоторая постоянная.

К такому же заключению можно прийти, рассматривая и две другие реакции в соотношениях (7).

Анализ реакции замкнутой системы позволяет с помощью доказанной выше теоремы получить следующий критерий устойчивости.

Частотный критерий устойчивости. Пусть многочлен $q(p)$ не имеет нулей на мнимой оси, а r - число его нулей, расположенных строго в правой полуплоскости. Тогда, для того чтобы замкнутая система была устойчивой, необходимо и достаточно выполнения двух условий

1. $1 + W(j\omega) \neq 0, \quad -\infty < \omega < +\infty;$
2. $\Delta \arg[1 + W(j\omega)]_{-\infty}^{+\infty} = 2pr.$

Доказательство. Если система устойчива, то $Q(j\omega) \neq 0$, что можно записать в виде пункта 1 критерия. Тогда из приведенной теоремы при $k = 0$ следует пункт 2 критерия. И наоборот, если выполняются условия критерия, то $Q(j\omega) \neq 0$, а $k = 0$.

Критерий имеет в точности форму известного критерия Найквиста. Таким образом, строго показано, что последний применим и для рассматриваемого класса систем.

Заметим еще, что наша формулировка критерия (и теоремы) относится к случаю так называемых статических систем ($q(0) \neq 0$). Случай астатических систем ($q(0) = 0$, например, при $a(0) = 0$ -

астатическом регуляторе) можно рассмотреть, как обычно, с помощью обхода точки $p = 0$ по дуге сколь угодно малого радиуса.

Наконец заметим, что в силу симметрии частотного годографа, равенство п. 2 критерия можно свести к равенству

$$\Delta \arg [1 + W(j\omega)]_0^{+\infty} = pr.$$

В заключение отметим, что решение задачи устойчивости САР ТОА получено строго, без упрощения аналитической природы изображения переменных. Показана роль нулей характеристической функции, а также существенно особой точки изображений. Показано также, что если система асимптотически устойчива, то она устойчива экспоненциально. Этот результат открывает возможности анализа качества системы (в частности, точности) традиционными для теории регулирования методами.

А.Т. Барабанов, С.А. Конева. **Задача аналізу стійкості системи автоматичного регулювання конвекційного теплообміну**

РЕЗЮМЕ. Застосуванням перетворення Лапласа побудована модель системи автоматичного регулювання конвекційного теплообміну. Аналіз розподілу нулів характеристичної функції системи й інтегралів зворотності для реакцій дозволяє цілком вирішити питання про умови стійкості системи.

A.T. Barabanov, S.A. Koneva. **The task of the stability analysis of a automatic control system by convection heat exchange .**

SUMMARY. A model of automatic control system of convection heat exchange was constructed by means of Laplace transformation. The analysis of the distribution of the system characteristic function zeros and inversion integrals allows to solve the stability conditions of the system completely.

Список использованной литературы

1. Т. Себиси. Конвективный теплообмен / Т. Себиси, П. Брэдшоу. – М.: Мир, 1987.-589 с.
2. Сыромятников В.Ф. Наладка автоматики судовых энергетических установок. Л.: Судостроение, 1980. - 352 с.
3. Шевяков А.А., Яковлева Р.В. Управление тепловыми объектами с распределенными параметрами. М.: Энергоатомиздат, 1986.-203 с.
4. Барабанов А.Т., Конева С.А. Об одной одномерной задаче теплообмена.// Динамические системы Межведомственный научный сборник Выпуск 17. - Симферополь: Таврия. 2001. - С.190-195.

Поступила в редколлегию 16.04.03