бойке руды и позволяет на основе сложившихся представлений совершенствовать методику реализации этих процессов.

Список использованной литературы.

1. Корнеев А.И.,Николаев А.П.,Шиповский И.Е. Приложение метода конечных элементов к задачам соударения твердых деформируемых тел.//Труды 7 Всесоюзной конф. "Численные методы решения задач теории упругости и пластичности». – Новосибирск: Наука,1982. – С. 122 – 129.
2. Шиповский И.Е., Локшина Л.Я. Метод расчета напряженно-деформированного состояния породных массивов.// Труды Международной конференции «Геодинамика и напряженное состояние недр Земли» – Новосибирск: СО РАН,1999. – С. 56 – 60.
3. Физика взрыва. /Под ред. К.П. Станюковича. – М.: Наука,1975.– 704 с.
4. Уилкинс М.Л. Расчет упругопластических течений. //Вычислительные методы в гидродинамике. – М.:Мир,1967. – С. 212 – 263.

Поступила в редколлегию 18.05.2000

УДК 539.3

В.Н. ТИЩЕНКО, канд. физ.-мат. наук, Таврический нац. ун-т.

КОЛЕБАНИЯ ПРИЗМАТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ.

В статье получены уравнения продольных и поперечных колебаний призматического стержня, несколько отличные от применяемых в строительной механике (сопротивлении материалов). Отличие состоит не только в появлении дополнительных членов в уравнениях движения, известных как теория типа С.П. Тимошенко, но и в уточнении граничных условий и жесткости стержня при поперечных колебаниях. Рассмотрены колебания вертикального консольного стержня при горизонтальном движении основания из состояния покоя, дано сравнение с классической теорией поперечных (изгибных) колебаний призматических стержней.

Стержнем назовем упругое тело, поперечные размеры по осям координат y, z которого на «порядок» меньше продольного размера (ось x). Призматический стержень может быть представлен как пересечение двух тонких пластин толщиной $2h_1$ (ось z) и $2h_2$ (ось y) конечной ширины l (ось x), где ось x проходит через центр прямоугольника – поперечного сечения стержня. В дальнейшем рассматривается случай, когда боковая поверхность стержня, свободна от напряжений, т.е. $\vec{s}_y(y=\pm h_2)=\vec{s}_z(z=\pm h_1)=0$, где $\vec{s}_y, \vec{s}_z$ – вектора напряжений на соответствующих плоскостях. Цель работы – получение уравнений для перемещений точек оси x стержня, т.е. при $z=0, y=0$.

В случае тонкой пластины толщиной $2h_1$ приближенные уравнения для перемещений точек срединной плоскости $z=0$ имеют вид [1] (здесь и далее в обозначениях [1]):

$$\begin{cases} (\frac{r}{m}w^2 - Ax^2 - h^2)u_1 + (1-A)xh\mathrm{v}_1 = 0, \quad \Delta_1 = x^2 + h^2, \quad A = 4(1-g), \\ (1-A)xhu_1 + (\frac{r}{m}w^2 - x^2 - Ah^2)\mathrm{v}_1 = 0, \qquad g = \frac{m}{l+2m} = \frac{c_2^2}{c_1^2}, \\ [\frac{r}{m}w^2 - \frac{1}{6}Ah_1^2\Delta_1(\frac{r}{m}w^2 - 2\Delta_1)]w_1 = 0, \qquad x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad h = \frac{\partial}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial}{\partial t}, \end{cases} \tag{1}$$

l, m – упругие параметры Ляме, r – плотность, c_1, c_2 – скорости продольной и поперечной волн в упругой среде, $\vec{u}_1 = \vec{u}(z=0) = (u_1, \mathrm{v}_1, w_1)^T$.

В системе уравнений (1) присутствуют производные по y – параметр h, которые не позволяют непосредственно получить эти уравнения. Для их исключения запишем подобные (1) соотношения для тонкой пластины толщиной $2h_2$, где $y = \pm h_2$ описывает плоскости, свободные от напряжений:

$$\begin{cases} (\frac{r}{m}w^2 - Ax^2 - z^2)u_2 + (1-A)xz\mathrm{w}_2 = 0, \qquad \Delta_2 = x^2 + z^2, \\ (1-A)xzu_2 + (\frac{r}{m}w^2 - x^2 - Az^2)\mathrm{w}_2 = 0, \qquad z = \frac{\partial}{\partial z}, \\ [\frac{r}{m}w^2 - \frac{1}{6}Ah_2^2\Delta_2(\frac{r}{m}w^2 - 2\Delta_2)]\mathrm{v}_2 = 0, \qquad \vec{u}_2 = \vec{u}(y=0) = (u_2, \mathrm{v}_2, w_2)^T. \end{cases} \tag{2}$$

Таким образом, для трех компонент перемещений оси x $u(y=0,\ z=0)$ получены шесть уравнений (1), (2), из которых должны быть исключены производные по нормальным к боковой поверхности стержня координатам y, z. Для этого дополним уравнения соотношениями, вытекающими из соотношений теории упругости (закон Гука) для производных по нормали к поверхностям $y=0, z=0$:

$$\begin{aligned} z\vec{u}_1 &= \hat{m}_1\vec{u}_1 + \hat{m}_2\vec{s}_z, \qquad & z^2\vec{u}_1 &= \hat{n}_1\vec{u}_1 + \hat{n}_2\vec{s}_z, \\ h\vec{u}_2 &= \hat{m}_1\vec{u}_2 + \hat{m}_2\vec{s}_y, \qquad & h^2\vec{u}_1 &= \hat{n}_1\vec{u}_1 + \hat{n}_2\vec{s}_z, \end{aligned} \tag{3}$$

где выражения для матриц $\hat{m}_i$ приведены в [1], $\hat{n}_1 = \hat{m}_1^2 + \hat{m}_2 \hat{m}_3$, $\hat{n}_2 = \hat{m}_1 \hat{m}_2 + \hat{m}_2 \hat{m}_4$. Аналогично матричные операторы $\check{m}_1$, $\check{m}_2$, $\check{n}_1$, $\check{n}_2$ получены из $\hat{m}_i$, $\hat{n}_i$ $(i = 1{,}2)$ заменой $h \to z$.

Как показано в [1], величины $\dot{s}_z (z = 0)$, $\dot{s}_y (y = 0)$ с точностью до $h_i^2 \Delta_i$, $\frac{r}{m} h_i^2 w^2$ в сравнении с единицей равны нулю, т.е. при $z = 0$ $(B = 1 - 2g)$:

$$z \dot{u}_1 = \hat{m}_1 \dot{u}_1, \qquad z^2 \vec{u}_1 = \hat{n}_1 \vec{u}_1$$

или

$$z\, u_1 = -x\, w_1, \quad z^2 u_1 = \left[\frac{r}{m} w^2 - (A - B) x^2 - h^2 \right] u_1 + (1 - A + B) x h \mathrm{v}_1,$$

$$z \mathrm{v}_1 = -h w_1, \quad z^2 \mathrm{v}_1 = (1 - A + B) x\, h u_1 + \left[\frac{r}{m} w^2 - (A - B) h^2 - x^2 \right] \mathrm{v}_1, \tag{4}$$

$$z w_1 = -B(x u_1 + h \mathrm{v}_1), \quad z^2 w_1 = (g \frac{r}{m} w^2 + B \Delta_1) \mathrm{w}_1 .$$

Аналогично при $y = 0$

$$h \vec{u}_2 = \check{m}_1 \vec{u}_2, \qquad h^2 \vec{u}_1 = \check{n}_1 \vec{u}_2$$

$$h u_2 = -x \mathrm{v}_2, \quad h^2 u_2 = \left[\frac{r}{m} w^2 - (A - B) x^2 - z^2 \right] u_2 + (1 - A + B) x z w_2,$$

$$h \mathrm{v}_2 = -B(x u_2 + z w_2), \qquad h^2 \mathrm{v}_2 = (g \frac{r}{m} w^2 + B \Delta_2) \mathrm{v}_2, \tag{5}$$

$$h w_2 = -z \mathrm{v}_2, \quad h^2 w_2 = \left[\frac{r}{m} w^2 - (A - B) z^2 - x^2 \right] w_2 + (1 - A + B) x z u_2 .$$

Для оси x, когда $y = z = 0$ можно получить (n – коэф. Пуассона) :

$$h \mathrm{v} = -\frac{2\mathrm{B}}{\mathrm{A}} x u = -n x u, \quad h w = -\frac{2\mathrm{B}}{\mathrm{A}} x u = -n x u, \quad (h^2 + z^2) u = (\frac{r}{m} w^2 - 2 x^2) u,$$

$$A h^2 \mathrm{v} = (\frac{r}{m} w^2 + 2 B x^2) \mathrm{v}, \qquad A h^2 w = B(\frac{r}{m} w^2 - 2 x^2) w,$$

$$A z^2 \mathrm{v} = B(\frac{r}{m} w^2 - 2 x^2) \mathrm{v}, \qquad A z^2 w = (\frac{r}{m} w^2 + 2 B x^2) w.$$

Подстановка полученных соотношений в уравнения (1), (2) дает уравнения продольных колебаний для $u(x,t)$ в виде

$$[\frac{r}{m}w^2 - \frac{4(A-1)}{A}x^2]u = 0\,, \qquad \frac{4(A-1)}{A} = \frac{E}{m}\,, \tag{7}$$

(E – модуль Юнга) и для $\mathrm{v}(x,t), w(x,t)$ уравнения поперечных колебаний:

$$\begin{aligned} &\left\{\frac{r}{m}w^2 - \frac{1-n}{6}h_2^2(B\frac{r}{m}w^2 + 2x^2)(\frac{r}{m}w^2 - 2x^2)\right\}\mathrm{v} = 0, \\ &\left\{\frac{r}{m}w^2 - \frac{1-n}{6}h_1^2(B\frac{r}{m}w^2 + 2x^2)(\frac{r}{m}w^2 - 2x^2)\right\}w = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Остальные уравнения в (1), (2) (три из шести) выполняются тождественно.

Отметим некоторые качественные особенности полученных уравнений. Так, если уравнение (7) для продольных колебаний полностью совпадает с известным в теории продольных колебаний стержня, то уравнения (8) не имеют аналога в прикладной механике, хотя формально совпадают с известной теорией С.П.Тимошенко [2] по составу производных в полученных уравнениях. Особо следует отметить наличие зависимости от коэффициента Пуассона, т.н. «жесткости балки» – коэффициента при старшей производной по продольной координате x. Если в технической теории балок он равен $EI_z = \frac{4}{3}Eh_2h_1^3$, то в уравнении (8) относительно w получено:

$$\frac{2}{3}m(1-n)Sh_1^2 = \frac{4}{3}E\frac{1-n}{1+n}h_1^3h_2$$

(S – площадь поперечного сечения), т.е. «жесткость» стержня уменьшена в $(1-n)(1+n)^{-1}$ раз в сравнении с известным уравнением Бернулли изгиба балок. Так как $0 \le n \le 0{,}5$, то эта величина меняется от $1/3$ до 1, что дает значительную поправку в амплитудные, скоростные и частотные характеристики. Отметим, что полученные выводы касаются традиционного уравнения динамики поперечных колебаний стержней в виде

$$r\,S\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+EI_z\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=q(x,t),$$

где $q(x,t)-$ погонная нагрузка в направлении оси z:

$$q(x,t)=\left[s_z(z=h_1)-s_z(z=-h_1)\right]\times 2h_2.$$

Что касается уравнений (8), то они подлежат уточнению в силу того, что при их получении были сделаны определенные упрощения. Поэтому имеет смысл получить уравнение движения стержня с иной точки зрения, а именно используя понятия «изгибающий момент» M_y и «перерезывающая сила» Q_z на площадке $x=const$:

$$Q_z=\iint\limits_S s_{xz}dydz,\qquad M_y=\iint\limits_S z s_{xx}dydz,$$

которые связаны зависимостью [2]:

$$\frac{\partial M_y}{\partial x}=Q_z-I_p\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2},\qquad \frac{\partial Q_z}{\partial x}=q-r\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{9}$$

Можно показать [1], что $\vec{s}_z(x,y,0,t)$ определяется граничными условиями:

$$\vec{s}_z(z=0)=-\frac{1}{2}\hat{n}_3\,h_1^2\,\vec{u}_1(z=0),\qquad \hat{n}_3=\hat{m}_3\hat{m}_1+\hat{m}_4\hat{m}_3,$$

$$\hat{n}_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & xA(\Delta_1-\frac{1}{2}\frac{r}{m}w^2) \\ 0 & 0 & h\,A(\Delta_1-\frac{1}{2}\frac{r}{m}w^2) \\ xA(\Delta_1-\frac{1}{2}\frac{r}{m}w^2) & h\,A(\Delta_1-\frac{1}{2}\frac{r}{m}w^2) & 0 \end{pmatrix}$$

Если исключить производные по y, как это сделано ранее (6), то получим:

$$\begin{aligned}
&s_{xz}(0,0)=-\frac{1}{2}x(2mx^2-rw^2)h_1^2w(x,t),\\
&Q_z\sim x(rw^2-2mx^2)h_1^2Sw(x,t),\\
&M_y\sim(rBw^2-Ex^2)h_1^2Sw(x,t),\\
&\frac{\partial Q_z}{\partial x}\sim x^2(rw^2-2mx^2)h_1^2Sw(x,t).
\end{aligned}\tag{10}$$

Сравнивая выражения (9) с исходными (8), видно, что основной оператор поперечных колебаний имеет вид:

$$r\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{1}{3}h_1^2(1-g)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(r\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-2m\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)=\frac{q(x,t)}{S}, \tag{11}$$

в котором опущен член Bw^2 в первой скобке оператора (8) как несоответствующий физической трактовке уравнений движения. Аналогичное уравнение описывает поперечные колебания в плоскости $y=0$ для $\mathrm{v}(x,t)$ с заменой h_1^2 на h_2^2.

Полученное уравнение поперечных колебаний призматического стержня требует новых выражений силовых граничных условий. Например, отсутствие напряжений на свободном конце стержня, а именно: $s_{xx}=0,\ s_{xz}=0$, приводит к выражениям

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad B\frac{r}{m}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-2(1+n)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{r}{m}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)=0, \tag{12}$$

(аналогично для $\mathrm{v}(x,t)$).

Эти граничные условия выполнены на свободном конечном сечении после прихода волны деформированного состояния, ибо оператор (11) гиперболического типа в отличие от классической теории изгиба балок. Это можно показать, применив представление решений уравнения (11) в виде интеграла Фурье:

$$w(x,t)=\frac{2}{p}\int_0^\infty \mathrm{Re}\,\overline{w}(x,w)\cos wt\,dw,\qquad \overline{w}(x,w)=\overline{\overline{w}}(x,w)e^{xx}. \tag{13}$$

Тогда для $x(w)$ из (11) можно получить

$$-rw^2+2rk^4x^2(rw^2+2mx^2)=0, \tag{14}$$

или

$$c^4+2k^4w^2(c^2-2c_2{}^2)=0,\quad c^2=-\frac{w^2}{x^2},\quad c_2^2=\frac{m}{r},\quad k^4=\frac{h_1^2}{6}(1-n)$$

откуда видно, что $c^2(w)\le 2c_2^2$, т.е. фазовая скорость любой моды с частотой w конечна, что позволяет говорить о наличии переднего фронта деформированного состояния, имеющего скорость $c_{\max}=\sqrt{2}\,c_2$.

Рассмотрим задачу о колебаниях вертикального призматического консольного стержня длиной l, который при $x=0$ движется по закону $w=f(t)$ ($f(t)=0$ при $t<0$) в горизонтальном направлении (ось x направлена вдоль стержня $(x \le l)$). Тогда для уравнения (11) можно сформулировать граничные условия с нулевыми начальными: при $x = 0$:

$$w(0,t) = f(t), \qquad \frac{\partial w}{\partial x}(0,t) = 0;$$

при $x = l$:

$$2c_1^2(1+n)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - B\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}(2c_2^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}). \tag{16}$$

Разыскивая решение в виде (13), получим дисперсионное соотношение (14) с корнями:

$$x_1^2 = \frac{-k^2w^2 - \sqrt{k^4w^4 + 4c_2^2w^2}}{4c_2^2k^2} < 0; \quad x_2^2 = \frac{-k^2w^2 + \sqrt{k^4w^4 + 4c_2^2w^2}}{4c_2^2k^2} > 0,$$

так что

$$\overline{w}(x,w) = \mathrm{Re}\left[C_1e^{-il_1x} + C_2e^{-l_2x} + C_3e^{il_1x} + C_4e^{l_2x}\right],$$

$$l_1^2 = -x_1^2, \quad l_2^2 = x_2^2.$$

Так как фазовые скорости для всех частот конечны, то существует передний фронт волн, обладающих дисперсией, поэтому первая волна распространяется без учета граничного условия при $x = l$, т.е.

$$\overline{w}_1(x,w) = \mathrm{Re}\left[C_1e^{-il_1x} + C_2e^{-l_2x}\right],$$

где постоянные C_1, C_2 определяются только из граничных условий при $x = 0$:

$$C_1 = F(w)\frac{l_2(l_2 + il_1)}{l_1^2 + l_2^2}, \qquad C_2 = -iF(w)\frac{l_1(l_2 + il_1)}{l_1^2 + l_2^2}$$

($F(w)$ – косинус-Фурье образ функции $f(t)$) или

$$\overline{w}_1 = F(w)G(w), \quad G(w) = \frac{l_2^2}{\Delta}\cos l_1x + \frac{l_1l_2}{\Delta}\sin l_1x + \frac{l_1^2}{\Delta}e^{-l_2x},$$

$$\Delta = l_1^2 + l_2^2. \tag{17}$$

Нахождение оригинала изображения $G(w)$ представляет определенные трудности, тем более, что интегралы обратного преобразования Фурье являются расходящимися. Поэтому появляется необходимость сведения их к известным табличным, какими являются изображения при $k^2|w|/c_2 \to 0$:

$$l_1 = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{|w|}{2c_2}}(1+\frac{k^2|w|}{4c_2}), \quad l_2 = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{|w|}{2c_2}}(1-\frac{k^2|w|}{4c_2}+\frac{k^4w^2}{16c_2^2}), \quad \Delta = \frac{|w|}{k^2c_2},$$

$$\frac{l_1 l_2}{\Delta} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{l_1^2}{\Delta} = \frac{1}{2}(1+\frac{k^2|w|}{2c_2}), \qquad \frac{l_2^2}{\Delta} = \frac{1}{2}(1-\frac{k^2|w|}{2c_2}+\frac{k^4w^2}{8c_2^2}).$$

Качественное исследование интегралов Фурье от $\overline{w}(x,w)$ (17) можно осуществить на основе метода стационарной фазы [3], который дает два значения стационарных точек $\dot{q} = w_0(t/x)$ и амплитуд $A(x,t) = (\sqrt{x})^{-1} \cdot a(t/x)$ при условии

$$0 \le x \le \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{2}\, c_2 t, \tag{18}$$

т.е. существует две волновые моды $w_1(x,t) = A(x,t)\cos q(x,t))$ с волновым фронтом $x = 2c_2 t \cdot \sqrt{2/3}$, скорость которого немного выше значения $c_{\max} = \sqrt{2}c_2$, что может быть обусловлено приближением метода стационарной фазы. В любом случае важен сам факт конечности скорости волнового фронта, обусловленный наличием смешанной производной в уравнении движения (11) Классическое решение уравнения изгибных колебаний балки при пренебрежении этим членом в уравнении имеет вид:

$$\begin{gathered} G(w,x) = \frac{1}{2}(\cos lx + \sin lx + e^{-lx}), \quad l = l_1 = l_2 = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{w}{2c_1}}, \\ g(x,t) = \frac{x}{t}\sqrt{\frac{c_2k^2}{pt}}\sin\frac{x^2}{8c_2k^2t} \end{gathered} \tag{19}$$

для всех x, что требует подключения граничных условий при $x = l$ с самого начала возникновения колебаний.

Отраженная волна

$$\overline{w}_2(x,w) = \mathrm{Re}[C_3 e^{-il_1(l-x)} + C_4 e^{-l_2(l-x)}], \tag{20}$$

полученная при граничных условиях (15) при $x = l$, имеет те же фазовые характеристики, что и прямая волна, с новыми амплитудными характеристиками C_3, C_4, обусловленными граничными условиями для суммы $w = w_1(x,t) + w_2(x,t)$. Этот процесс должен быть изучен дополнительно, особенно влияние новых граничных условий, не имеющих аналога в специальной литературе [4].

Таким образом, по результатам статьи могут быть сделаны следующие выводы:

- уравнение поперечных колебаний стержней должно быть дополнено смешанной производной четвертого порядка, что обуславливает конечную скорость распространения возмущений вдоль балки и изменение силовых граничных условий;

- необходимо учитывать уточненное значение жесткости призматического стержня, которое зависит от коэффициента Пуассона, что вносит значительные изменения в амплитудные и частотные характеристики процесса колебаний;

- наличие волнового фронта с предельной фазовой скоростью $c_{\max} = \sqrt{2}c_2$ позволяет изменить вычислительную технологию решения конкретных задач, ограничиваясь определением только двух постоянных интегрирования для последовательности прямых и отраженных волн, определенных на временном интервале $nT = 2ln/c_{\max} \quad (n = 1,2,\ldots)$.

Список использованной литературы.

1. Тищенко В.Н. Колебания упругих тонких пластин.//Динамические системы. – 1999. – Вып. 15. – С. 84–91.
2. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. – Киев: Наукова думка, 1972. – 504 с.
3. Уизем Дж. Дж. Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977. – 622 с.
4. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник, т.3. под ред. И.А.Биргера, Я.Г.Пановко – М.: Машиностроение, 1968 –568 с.

Поступила в редколлегию 16.05.2000