

УДК 539.3

А.Р.СНИЦЕР, канд. физ.-мат. наук, Таврический нац. ун-т

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ НА ПОЛОСТИ В ПОЛУБЕСКО- НЕЧНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

В работе М. Био [5], рассмотрена задача о распространении волны вдоль свободной поверхности цилиндрической полости в упругом теле **бесконечной** протяженности и получена дисперсионная зависимость скорости этой волны от отношения длины волны к диаметру полости.

В данной статье получены решения для волн в **полуограниченной** упругой среде с цилиндрической полостью при осесимметричном гармоническом нагружении плоской поверхности. Решения выражаются через потенциалы Ламэ, представленные комбинациями интегралов, содержащих тригонометрические ядра и ядра преобразований Вебера. Получено решение для объемных волн и волн типа Био. Исследованы зависимости относительной скорости и относительной длины поверхностной волны от частоты нагружения.

При исследовании динамических процессов в упругих средах существенную роль играют волны на свободных от напряжений поверхностях сплошной среды. Таковыми являются поверхностные волны Рэлея [6], в случае плоской поверхности, и волны типа Био [5] на (свободной от напряжений) цилиндрической поверхности. В частности в работе Био [5] исследованы поверхностные волны на свободной от напряжений цилиндрической полости в бесконечной упругой среде, т.е. фактически её свободные колебания.

Для решения основных, а также контактных задач теории упругости, в которых имеются такие волны, возникает необходимость исследования задачи о колебаниях полупространства содержащего свободную от напряжений цилиндрическую поверхность, с образующими перпендикулярными границе полупространства.

Рассмотрим упругое полупространство $Z \geq 0$ с цилиндрической полостью $r = a$. Исследуем волны возникающие в такой среде под воздействием гармонической осесимметричной вертикальной нагрузки $p = p_0 d(r-b)e^{i\omega t}$, приложенной к границе $Z = 0$ полупространства, так что:

$$s_z = -p_0 d(r-b)e^{i\omega t}. \quad (1)$$

Кроме этого будем полагать на плоской границе отсутствие касательных перемещений:

$$U_r = 0, \quad U_j = 0. \quad (2)$$

Цилиндрическая граница $r = a$ полагается свободной от напряжений¹:

$$s_{rr} = t_{rz} = t_{rj} = 0. \quad (3)$$

Решение уравнения динамики сплошной среды будем разыскивать посредством потенциалов Ламэ:

$$\bar{U} = \text{grad} y_0 + \text{rot} \bar{y}, \quad \text{div} \bar{y} = 0, \quad (4)$$

где $\bar{y} = y_1 \vec{e}_r + y_2 \vec{e}_j + y_3 \vec{e}_z$, $y_0(r, z)$, $\bar{y}(r, z)$ – скалярный и векторный потенциалы, \vec{e}_r , \vec{e}_j , \vec{e}_z – орты цилиндрической системы координат.

Потенциалы Ламэ удовлетворяющие уравнению динамики сплошной среды и граничным условиям (1)–(3) будем разыскивать в виде:

$$\begin{aligned} y_0(r, z) &= \int_0^\infty x A_0(x) G_{1,0}(x, r) e^{-k_1 z} dx + \sqrt{\frac{2}{p}} \int_0^\infty B_0(l) K_0[r k_1(l)] \sin l z dl, \\ y_2(r, z) &= \int_0^\infty x A_1(x) G_{1,1}(x, r) e^{-k_2 z} dx + \sqrt{\frac{2}{p}} \int_0^\infty B_1(l) K_1[r k_2(l)] \cos l z dl, \\ y_1(r, z) &= y_3(r, z) \equiv 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь:

$G_{1,n}(x, r) = [J_1(x a) Y_n(x r) - J_n(x r) Y_1(x a)] H_1^{(2)}(x a)^{-2}$, ($n = 0, 1$) – ядро обращения преобразований Вебера [4,7], $J_n(x)$, $Y_n(x)$, $H_1^{(2)}(x)$ – цилиндрические функции; $K_n(x)$ – функция Макдональда;

$$k_{1,2}(x) = \sqrt{x^2 - k_{1,2}^2}, \quad k_{1,2} = w / c_{1,2} - \text{волновые числа}; \quad c_1 = \sqrt{\frac{2m(1-n)}{r(1-2n)}},$$

$c_2 = \sqrt{\frac{m}{r}}$ – скорости продольных и поперечных упругих волн соответственно (m – модуль сдвига, n – коэффициент Пуассона, r – плотность среды); w – циклическая частота.

Ветви радикалов $k_{1,2}(x)$ выбираются так, чтобы $\text{Re} k_{1,2}(x) > 0$ и $\text{Im} k_{1,2}(x) > 0$, тогда, с учетом временного множителя, решения (5)

¹ Задача с подобным нагружением полупространства решалась в работе [8], где полость считалась подкрепленной ($t_{rz} = t_{rj} = U_r = 0$, $r = a$). Такие условия не порождают поверхностные волны на полости и автоматически выполняются соответствующим выбором ядер преобразований Вебера

при $z \rightarrow \infty$ удовлетворяют условию излучения Зоммерфельда [2], если $0 < x < k_{1,2}$ и затухают на бесконечности, если $x > k_{1,2}$.

В представлении Ламэ условия (1), (2) на поверхности полупространства приобретают вид:

$$s_z = m \left\{ \left(2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2k_1^2 - k_2^2 \right) y_0 + 2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r y_2) \right\} = -p_0 d(r-b) e^{i\omega t}, \quad (6)$$

$$U_r = \frac{\partial y_0}{\partial r} - \frac{\partial y_2}{\partial z} = 0, \quad U_j = \frac{\partial y_1}{\partial z} - \frac{\partial y_3}{\partial r} = 0. \quad (7)$$

Удовлетворяя граничным условиям (6), (7), используя обращения интегральных преобразований Вебера, получим:

$$A_0(x) = -\frac{p_0}{m} \frac{b}{k_2^2} c_{1,0}(x, b), \quad A_1(x) = \frac{x}{k_2(x)} A_0(x); \quad (8)$$

где $c_{1,0}(x, b) = J_1(xa)Y_0(xb) - J_0(xb)Y_1(xa)$ – ядро интегральных преобразований Вебера при $r = b$.

Условия (3) на цилиндрической поверхности в представлении Ламэ приобретают вид:

$$t_{rj} = m \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial y_1}{\partial z} - \frac{\partial y_3}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial y_1}{\partial z} - \frac{\partial y_3}{\partial r} \right) \right\} = 0, \quad (9)$$

$$t_{rz} = m \left\{ 2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial r \partial z} - \left(2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_2^2 \right) y_2 \right\} = 0, \quad (10)$$

$$s_r = -m \left\{ \left[2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + k_2^2 \right] y_0 + 2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial r \partial z} \right\} = 0. \quad (11)$$

Удовлетворяя условиям (9)–(11), приходим к соотношениям для определения интегральных плотностей $B_0(x)$, $B_1(x)$:

$$B_0(l) = \frac{2l^2 - k_2^2}{2lk_1} \frac{K_1(ak_2)}{K_1(ak_1)} B_1(l); \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & 2C \int_0^\infty G_{1,0}(x, b) \left[(2k_1^2 + k_2^2) e^{-k_1 z} - 2x^2 e^{-k_2 z} \right] dx = \\ & = \sqrt{\frac{2}{p}} \int_0^\infty B_1(l) \Delta(l) K_1(ak_2) \sin lz dl, \end{aligned} \quad (13)$$

где $C = \frac{2}{p} \frac{b}{a} \frac{p_0}{m} \frac{1}{k_2^2}$, а функция $\Delta(I)$ – главный определитель неоднородной системы уравнений для определения $B_0(I)$, $B_1(I)$:

$$\Delta(I) = 4Ik_2 \left[\frac{1}{ak_2} + \frac{K_0(ak_2)}{K_1(ak_2)} \right] - \frac{2I^2 - k_2^2}{I} \left[\frac{2}{a} + \frac{2I^2 - k_2^2}{k_1} \frac{K_0(ak_1)}{K_1(ak_1)} \right] \quad (14)$$

Для определения неизвестной интегральной плотности $B_1(I)$ из интегрального уравнения (13), необходимо выполнить обратное преобразование Фурье. При этом возникают сложности вычисления интегралов типа $\int_0^\infty \exp(-zk_{1,2}(I)) \sin lz dz$, связанные с многозначностью функций $k_{1,2}(I)$ и правильным выбором их ветвей. Поэтому вначале производятся контурные преобразования интеграла левой части уравнения (13) в комплексной плоскости $z = x + ih$, с целью устранения его неоднозначности и приведения к удобному для эффективного вычисления виду. Только после этого выполняется обращение синус-преобразования Фурье в (13).

Для осуществления контурных преобразований интеграла левой части (13) в комплексной плоскости z его ядро $G_{1,0}(z, b)$ представлялось в виде $G_{1,0}(z, b) = \frac{i}{2} \left[\frac{H_0^{(2)}(zb)}{H_1^{(2)}(za)} - \frac{H_0^{(1)}(zb)}{H_1^{(1)}(za)} \right]$, а всё подынтегральное выражение – в виде суммы двух функций комплексной переменной z , определенных на четырехлистной римановой поверхности. Построение последней с учетом указанного выше выбора ветвей $k_{1,2}(z)$ описано в [7]. Для построения физически реализуемого решения использовался принцип предельного поглощения и разрезы листов римановой поверхности проводились в соответствии с [1,3]. В результате таких преобразований уравнение (13) принимает вид:

$$C \left\{ \int_0^\infty [(k_2^2 - 2h^2 - 2k_1^2) \sin z \sqrt{h^2 + k_1^2} + 2h^2 \sin z \sqrt{h^2 + k_2^2}] K(bh) dh + \int_0^{k_1} [(2x^2 - 2k_1^2 + k_2^2) \sin z \sqrt{k_1^2 - x^2} - 2x^2 \sin z \sqrt{k_2^2 - x^2}] H(bx) dx - \int_{k_1}^{k_2} x^2 \sin z \sqrt{k_2^2 - x^2} H(bx) dx \right\} = \sqrt{\frac{2}{p}} \int_0^\infty B_1(I) \Delta(I) K_1(ak_2) \sin lz dl$$

Здесь введены обозначения:

$$K(bh) = \frac{K_0(bh)}{K_1(ah)}, \quad H(bx) = \frac{H_0^{(2)}(bx)}{H_1^{(2)}(ax)} \quad (15)$$

Обращая синус-преобразование Фурье, используя формулу

$$\int_0^{\infty} \sin at \sin xt \, dt = -\frac{p}{2} [d(x+a) - d(x-a)], \text{ находим:}$$

$$B_1(l) = -\frac{Cl}{K_1(ak_2)} \frac{\Phi(l, b)}{\Delta(l)}, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(l, r) = & \frac{2l^2 - k_2^2}{s_1} H(rs_1)(1 - e_1) + 2s_1 H(rs_2)(1 - e_2) + \\ & + \frac{2l^2 - k_2^2}{k_1} K(rk_1)e_1 - 2k_2 K(rk_2)e_2, \end{aligned} \quad (17)$$

$s_{1,2} = \sqrt{k_{1,2}^2 - l^2}$, $k_{1,2} = \sqrt{l^2 - k_{1,2}^2}$, $e_{1,2} = e(l - k_{1,2})$ – функция Хэвисайда.

Запишем компоненты вектора перемещений, подставляя в представление (4) найденные потенциалы Ламэ:

$$\begin{aligned} U_r = & -C \left\{ \int_0^{\infty} l \frac{\Phi(l, b)}{\Delta(l)} \left[l \frac{K_1(rk_2)}{K_1(ak_2)} - \frac{2l^2 - k_2^2}{2l} \frac{K_1(rk_1)}{K_1(ak_1)} \right] \sin l_z \, dl + \right. \\ & \left. + \frac{a}{b} \int_0^{\infty} x G_{1,1}(x, r) (e^{-k_1 z} - e^{-k_2 z}) \, dx \right\}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} U_z = & C \left\{ \sqrt{\frac{2}{p}} \int_0^{\infty} l \frac{\Phi(l, b)}{\Delta(l)} \left[k_2 K(rk_2) - \frac{2l^2 - k_2^2}{2k_1} K(rk_1) \right] \cos l_z \, dl + \right. \\ & \left. + \frac{a}{b} \int_0^{\infty} G_{1,0}(x, r) \left(k_1 e^{-k_1 z} - \frac{x}{k_2} e^{-k_2 z} \right) \, dx \right\}, \quad U_j \equiv 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Проанализируем характер компоненты U_r на поверхности полости:

$$U_r = -\frac{1}{p} \frac{p_0}{m} \frac{b}{a} \int_0^{\infty} \frac{\Phi(l, b)}{\Delta(l)} \sin l_z \, dl \quad (20)$$

Записанное выражение имеет формальный характер. Для оценки интеграла (20) необходимо исследовать подынтегральное выражение, учитывая многозначность функций $k_{1,2}(l)$ и особенность, соответ-

ствующую нулю определителя $\Delta(I)$. С этой целью интеграл (20) преобразуется на комплексной плоскости.

Представляя $\sin I z = (e^{iIz} - e^{-iIz})/2i$ и затем выполняя контурные преобразования интеграла (20) на комплексной плоскости $z = x + ih$, выбирая ветви $\text{Re } k_{1,2} \geq 0, \text{Im } k_{1,2} \geq 0$, получим:

$$U_r(a, z) = -C k_2^2 \left\{ \text{Re} \int_0^\infty \frac{\Phi(ih, b)}{\Delta(ih)} e^{-hz} dh - \int_0^{k_1} e^{-iIz} \text{Im} \frac{\Phi(I, b)}{\Delta(I)} dI - \int_{k_1}^{k_2} e^{-iIz} \text{Im} \frac{\Phi(I, b)}{\Delta(I)} dI \right\} + C k_2^2 p \frac{\Phi(I_R, b)}{\Delta'(I_R)} e^{-iI_R z}.$$

$$\text{Im } k_{1,2} > 0, \quad \text{Im } k_1 = 0, \quad I_R \geq k_2 \geq k_1 \quad (21)$$

Здесь I_R – вещественный корень уравнения $\Delta(I) = 0$. Последнее слагаемое в (21) представляет собой радиальное колебание цилиндрической поверхности упругого полупространства (с амплитудой $2 \frac{b p_0}{a m} \frac{\Phi(I_R, b)}{\Delta'(I_R)}$), которое распространяется вдоль полости с фазовой

скоростью $V_R = w / I_R$.

Преобразуя выражение (19) для компоненты U_z , вектора перемещений, также как это было сделано для радиальной компоненты, и рассматривая её выражение на границе полости, можно выделить ту её составляющую, которая также распространяется со скоростью V_R . В итоге можно получить полный вклад поверхностной волны типа Био в компоненты вектора перемещения \vec{U} на поверхности полости:

$$\vec{U}_{нов}(a, z) = 2 \frac{b p_0}{a m} \frac{\Phi(I_R, b)}{\Delta'(I_R)} \left[\vec{i}_r + \vec{i}_z \Phi(I_R, a) \right] \exp i (wt - I_R z), \quad (22)$$

$$(I_R \geq k_2 > k_1)$$

Возникающее в данной задаче дисперсионное соотношение (14) исследовалось в задаче о распространении осесимметричных волн на поверхности цилиндрической полости в упругом теле **бесконечной** протяженности, рассмотренной в работе Био [5]. В ней это соотношение представляет определитель однородной системы уравнений, выражающей условия отсутствия напряжений на полости. Отметим

также, что однородные решения в виде потенциалов Ламэ в задаче Био выражаются через функции Макдональда и тригонометрические функции и имеют более простой вид, чем в случае полупространства:

$$y_0 = A K_0(r k_1) \cos I_R(z - V_R t), \quad y_2 = B K_1(r k_2) \sin I_R(z - V_R t). \quad (23)$$

Эти решения определяют собственные колебания полости в бесконечной упругой среде.

В рассматриваемой нами задаче есть внешнее воздействие (1), в силу чего условия на полости в виде (12),(13) приводят к неоднородной системе уравнений. Последняя имеет нетривиальные решения, если ее главный определитель $\Delta(I)$, порождающий дисперсионное соотношение (14) отличен от нуля. Поэтому к формальным решениям (18),(19) можно добавить однородные решения $C d(I - I_R)$ этой системы, а соответствующие интегралы, содержащие в знаменателе $\Delta(I)$, понимать в смысле Коши ($I \neq I_R$) (здесь C – неопределенная константа, d – дельта-функция Дирака). Это однородное решение и представляет поверхностную волну на полости.

Нами к решениям (18),(19) однородное решение не добавлялось, однако вклад поверхностной волны получен в результате контурного интегрирования, в виде вычета, соответствующего полюсу подынтегральных выражений в точке $I = I_R$. Эти вклады как для радиальной, так и вертикальной составляющих поверхностной волны при $r = a$ представлены выражением (22).

Приведем анализ дисперсионного уравнения. Произведем в (14) замены: $z = k_2 / x = V / c_2$, где V – скорость поверхностной волны на полости, а c_2 – скорость поперечных упругих волн (в дальнейшем на рисунках c_2 будет обозначаться как V_s); $x = \Lambda / D$, где Λ – длина поверхностной волны, $D = 2a$ – диаметр полости (заметим, что при этом $xa = p / x$); $s = c_2 / c_1 = \sqrt{(0.5 - n) / (1 - n)}$. Тогда дисперсионное уравнение примет вид:

$$\frac{2}{p} x z^2 + 4 \sqrt{1 - z^2} \frac{K_0\left(\frac{p}{x} \sqrt{1 - z^2}\right)}{K_1\left(\frac{p}{x} \sqrt{1 - z^2}\right)} - \frac{(2 - z^2)^2}{\sqrt{1 - s^2 z^2}} \frac{K_0\left(\frac{p}{x} \sqrt{1 - s^2 z^2}\right)}{K_1\left(\frac{p}{x} \sqrt{1 - s^2 z^2}\right)} = 0. \quad (24)$$

Данное трансцендентное уравнение решалось в среде математического пакета MathCAD 7.0 PRO. Решая уравнение (24) задавая отно-

сительную длину волны $x = \Lambda / D$ и коэффициент Пуассона n , получаем относительную скорость $z = V / V_s$. На рис.1 приведены результаты расчетов, представляющие дисперсионную зависимость скорости волны от относительной длины при $n = 0; 0.25; 0.5$. При малых

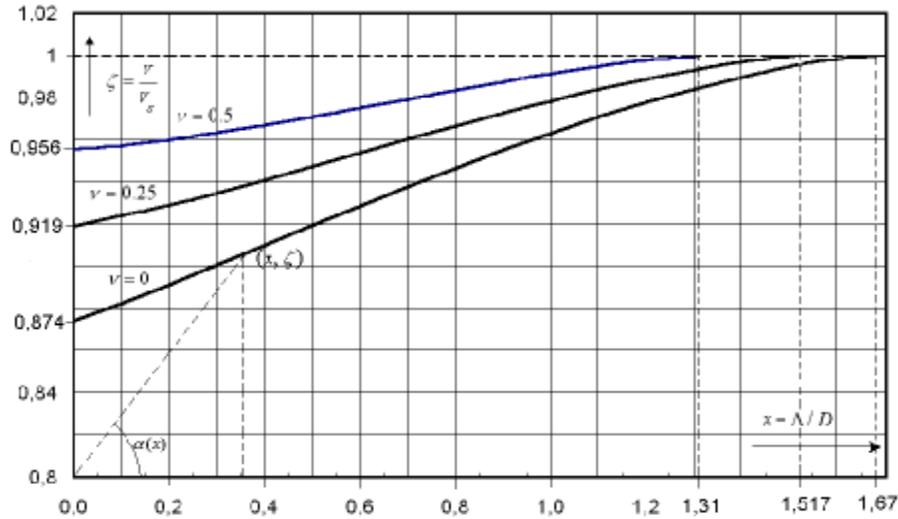


Рис.1 Зависимость скорости поверхностной волны от относительной длины волны.

длинах волн в сравнении с диаметром полости ($x \rightarrow 0$) уравнение Био переходит в уравнение для волн Рэлея [6]:

$$4(1 - z^2)^{1/2} - \frac{(2 - z^2)^2}{(1 - s^2 z^2)^{1/2}} = 0. \quad (25)$$

Уравнение Рэлея также нами решалось для указанных коэффициентов Пуассона. Соответствующие значения рэлеевских скоростей : 0.874; 0.919; 0.956 – являются точками пересечения графиков зависимостей $z(x)$ с осью z . На графиках также видно, что относительная скорость поверхностной волны на полости не превосходит единицу. Это означает, что абсолютная скорость поверхностных волн не может быть больше скорости поперечных ($V < V_s$ и следовательно $l > k_2$), только при этом условии радикал $k_2 = \sqrt{l^2 - k_2^2}$ остается вещественным. Только при этом, волна распространяется по поверхности полости вдоль оси z , и как видно из решений Био (23), а в случае нашей задачи из – (22) и (17), поверхностная волна затухает в радиальном направлении, и ее амплитуда при фиксированном радиусе r – вещественная. В противном случае радикал становится мнимым и нетрудно показать, что возникнет излучение в радиальном направлении. Таким образом, существует предельная относительная длина волны, выше которой поверхностные волны не существуют. На рис.1 указаны зна-

чения таких «отсекающих» длин волн $(\Lambda/D)_{\text{отсек.}} = 1.31; 1.517; 1.67$ для $n = 0.5; 0.25; 0$, соответственно. Приведенные здесь результаты, решения дисперсионного уравнения для поверхностных волн на полости в полупространстве – совпадают с результатами для полости в бесконечной упругой среде [5].

В нашей задаче, волны вызваны гармоническим возмущением (1) заданной частоты w поверхности $z = 0$, в то время как в задаче Био рассматривались свободные колебания полости. Представляется интересным на базе имеющегося анализа дисперсионного уравнения (14), исследовать зависимости относительной скорости волны на полости и ее относительной длины от частоты воздействия.

Приведем расчет для определения зависимости между частотой воздействия w , относительной скоростью z и длиной $x = \Lambda/D$ поверхностных волн. Введем безразмерную частоту воздействия $\Omega = w a \sqrt{r/m}$, которую можно представить, как число поперечных упругих волн, укладываемых в длине окружности полости – $\Omega = pD/\Lambda_s$. Для каждой точки $(\Lambda/D, z)$ кривой $z(x)$ (рис.1), можно вычислить отношение:

$$z(x)/x = \text{tg } a(x). \quad (26)$$

Относительную скорость поверхностной волны $z = V/V_s$ нетрудно выразить через введенную нами безразмерную частоту Ω , используя для фазовой скорости поверхностной волны формулу $V = \Lambda/T$ (T – период вынуждающего воздействия). В итоге получим выражение:

$$z/x = \Omega/p. \quad (27)$$

Приравнивая правые части (26) и (27) находим связь:

$$\Omega = p \text{tg } a(x). \quad (28)$$

По формуле (28) для каждой относительной длины x поверхностной волны (и соответствующей ей относительной скорости $z(x)$), можно вычислить соответствующую частоту Ω . На рис.2 и рис.3 изображены полученные взаимосвязи Ω с x и с $z(x)$ в плоскостях $(\Omega, z(x))$ и (Ω, x) . Из рис.2 видно, что z с ростом Ω монотонно убывает от 1 до значения, равного относительной скорости волны Рэлея для соответствующего коэффициента Пуассона n . При этом, как мы знаем, значение относительной скорости $z = 1$, соответствует отсекающей длине волны $x_{\text{отсек.}} = (\Lambda/D)_{\text{отсек.}}$, поэтому по формуле (28) получаем соответствующие запирающие частоты внешнего воздействия $\Omega_{\text{зап.}} = p \text{tg } a(x_{\text{отсек.}})$. Частоты воздействия ниже $\Omega_{\text{зап.}}$ не порождают поверхностные волны на полости. На рис.2 указаны значения за-

пирающих частот – $\Omega_{\text{зап}} = 1.88; 2.07; 2.40$, которым соответствуют отсекающие длины волн $x_{\text{отсек}} = 1.67; 1.517; 1.31$, для коэффициентов Пуассона $\nu = 0; 0.25$ и 0.5 . На рис.2 изображены также асимптоты $\zeta_{\text{Рэл}} = 0.874; 0.924$ и 0.955 , определяющие предельные минимальные значения скоростей поверхностных волн на полости и представляющие скорости волн Рэлея при соответствующих ν . К таким асимптотическим значениям приближается скорость при неограниченном росте частоты Ω . Действительно, при $x \rightarrow 0, a(x) \rightarrow p/2$ и $\text{tg } a(x) \rightarrow \infty$, а вместе с этим, в силу (28), $\Omega \rightarrow \infty$. Но при $x \rightarrow 0$ дисперсионное уравнение (14) переходит в уравнение Рэлея (25) и, таким образом, при $\Omega \rightarrow \infty$ имеем скорости, соответствующие рэлеевским.

Из рис.3 видно, что относительная длина поверхностных волн монотонно убывает с ростом частоты Ω , а коэффициент Пуассона слабо влияет на зависимость $\zeta(\Omega)$: основное различие состоит в значениях частот запираания для различных ν (результаты приведены для $\nu = 0$ и $\nu = 0.5$).

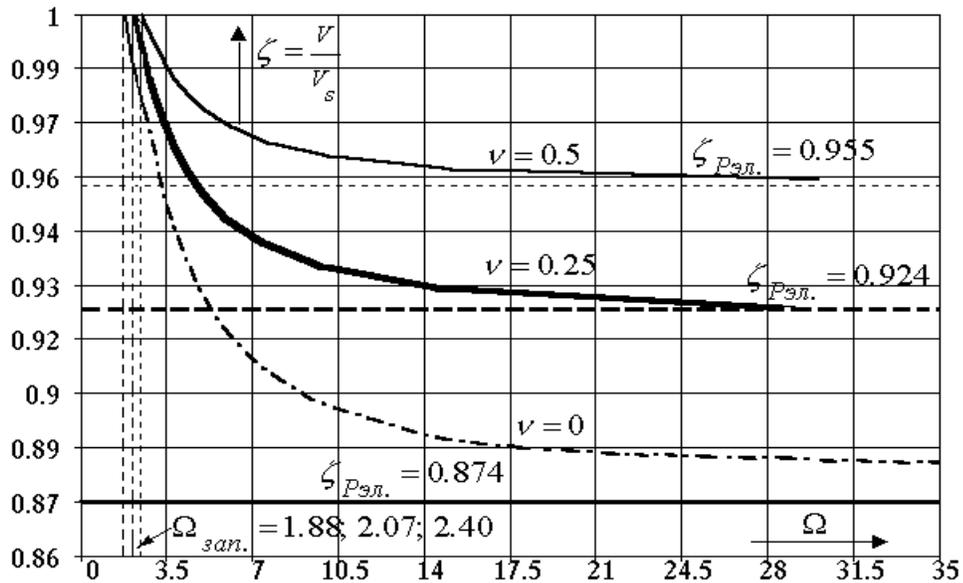


Рис.2 Зависимость скорости поверхностной волны на полости от частоты внешнего воздействия.

В рассмотренной здесь задаче о возбуждении волн в полубесконечной среде, содержащей цилиндрическую полость, вертикальная гармоническая нагрузка (1) порождает кроме поверхностных волн типа Био, которые здесь мы анализировали, также и волны в объеме. Исследование волнового поля перемещений в любых точках полупространства $z \geq 0, r > a$, требует вычисления интегралов (18), (19). Для этого их необходимо предварительно преобразовать, с целью по-

лучения однозначных физически реализуемых решений и эффективности их вычислений, подобно тому, как это делалось здесь для поверхностных волн.

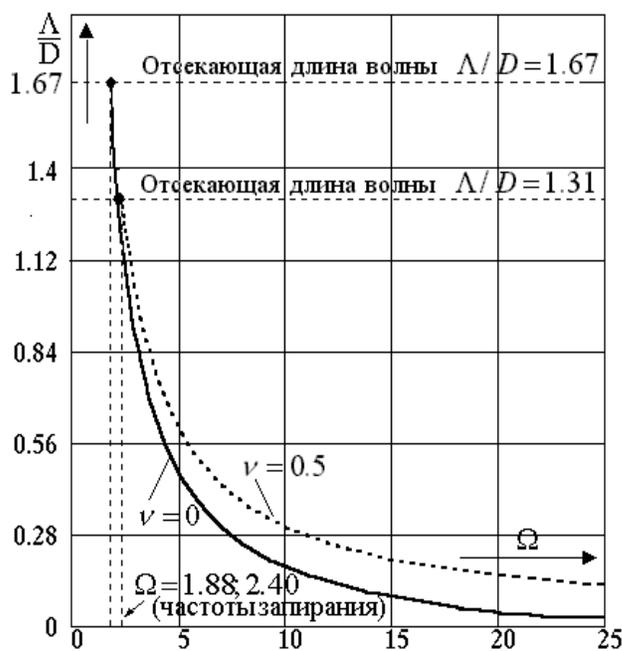


Рис.3 Зависимость относительной длины поверхностной волны от частоты внешнего воздействия.

ности их вычислений, подобно тому, как это делалось здесь для поверхностных волн.

Может представлять интерес исследование волнового поля на поверхности полупространства ($z = 0$), так как наличие волны Био на цилиндрической поверхности придает ему определенную специфику, связанную с наличием полюса в точке $I = I_R$ у подынтегральной функции в (19). Последнее можно использовать для диагно-

стики геометрии среды, в частности судить о наличии в ней полостей при анализе сейсмических данных.

Список использованной литературы

1. Гринченко В.Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.– Киев: Наук. думка, 1978.– 264 с.
2. Зоммерфельд А.. Дифференциальные уравнения в частных производных физики. – М., 1950. – 456 с.
3. Митра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. – М.: Мир, 1974. – 324 с.
4. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т.1. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. –278 с.
5. Biot M.A. Propagation of Elastic Waves in Cylindrical Bore Containing a Fluid // J. Appl. Physics. – 1952.– Vol.23, No 9. – pp.997 – 1005.
6. Rayleigh J.W. On waves propagated along the plane surface of an elastic solid // Proc. Lond. Math. Soc. – 1885/1886. – Vol.17, No 253. – pp. 4 – 11.
7. Malits P.Ya., Snitser A.R. Torsional Oscillations of a Circular Die on an Elastic Half-Space with a Cylindrical Cavity.//Journal of Soviet Mathematics.–1993. – Vol.65, No.3. – pp. 1629–1634.
8. Jonson E.R., Parnes R. Prpog. of Axisymm. Waves in an Elastic half-space containing a Cyлинд. inclusion. Part I : Formulation and general solution // Q. J. Mech. & Appl. Math. – 1977. – V.30, N 3. – pp. 235 – 253.

Поступила в редколлегию 12.04.2000