УДК 539.3

И. Т. СЕЛЕЗОВ, доктор физ.-мат. наук, Ин-т гидромеханики НАНУ
О. В. АВРАМЕНКО, канд. физ.-мат. наук, Кировоградский гос. пед. ун-т

РАСПРОСРАНЕНИЕ ВОЛН В УПРУГОМ НЕОДНОРОДНОМ СЛОЕ, КОНТАКТИРУЮЩЕМ С ЖИДКИМИ СРЕДАМИ

Приведены постановка и решение методом разложения искомых функций по малой координате задачи о распространении волн в неоднородном упругом слое, помещенном между двумя сжимаемыми жидкостями с различными физическими свойствами. Показано, что различные типы неоднородности слоя могут приводить к сильной концентрации волновых полей либо в центральной части слоя, либо вблизи его границ.

Исследованию распространения волн в упругом слое, контактирующем с жидкими средами, посвящены [1]–[4]. Отметим также статьи, непосредственно относящиеся к рассматриваемой задаче упруго-жидкого взаимодействия с учетом некоторых форм неоднородности упругой среды [5]–[14].

В настоящей статье представлено решение задачи о распространении гармонических волн в произвольно неоднородном по толщине слое, помещенном между жидкостями разной плотности, на основе метода разложения неизвестных функций в степенные ряды по малой координате. Неоднородность упругой среды характеризуется постоянными Ламе и плотностью, которые в общем случае являются функциями пространственных координат. Применяется модель неоднородной упругой среды [15], в которой модуль сдвига G и плотность r – постоянные величины, а постоянная Ламе l – функция вертикальной координаты, т.е. $l = l(x_3)$. В этом случае уравнение движения распадается на два независимых волновых уравнения для скалярного и векторного потенциалов $\mathbf{u} = \nabla f + \nabla \times \mathbf{A}$, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.

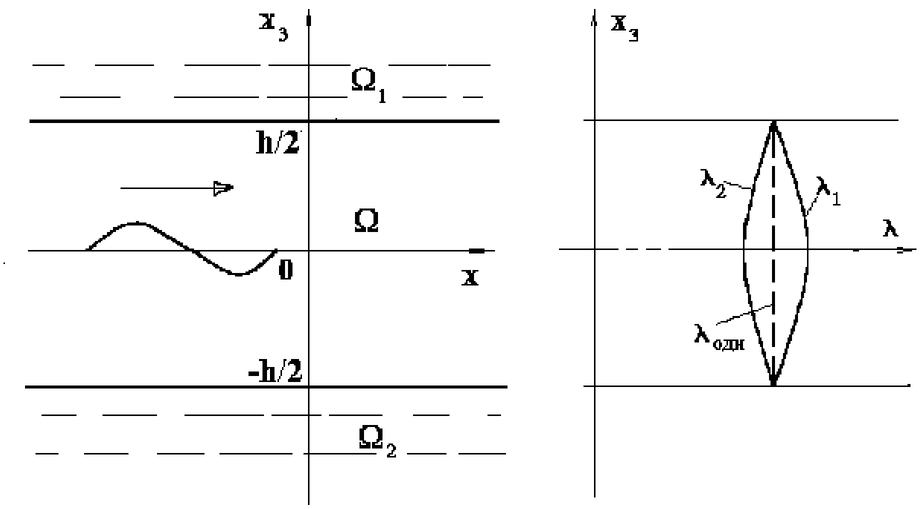
Рассмотрим распространение волн в произвольно неоднородном слое, ограниченном с двух сторон сжимаемыми невязкими жидкостями с плотностями r_1 и r_2, соответственно. Упругий слой помещен вдоль координаты x_1 (рис. 1) в области

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3), -\infty < x_1 < \infty, -\infty < x_2 < \infty, -h/2 \le x_3 \le h/2\},$$

а жидкие среды в верхнем и нижнем полупространствах

$$\Omega_1 = \{(x_1, x_2, x_3), -\infty < x_1 < \infty, -\infty < x_2 < \infty, h/2 \le x_3\},$$

$$\Omega_2 = \{(x_1, x_2, x_3), -\infty < x_1 < \infty, -\infty < x_2 < \infty, x_3 \le -h/2\}.$$



(а) **(б)**

Рис.1

Уравнения неоднородной упругой среды в области Ω имеют вид

$$\sum_{i=0}^{\infty} b_i x_3^i \nabla^2 f - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \qquad \nabla^2 x - \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

где $$c_s^2 = f(x_3) = (l(x_3) + 2G)/r_1 = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x_3^i .$$

В случае потенциального движения жидкости система уравнений гидродинамики с учетом выражений для вектора скорости $\mathbf{v}_j = -\nabla y_j \; (j = 1,2)$ приводится к волновым уравнениям в соответствующих областях Ω_1 и Ω_2

$$\nabla^2 y_j - \frac{1}{c_{0j}^2}\frac{\partial^2 y_{ij}}{\partial t^2} = 0, \quad \mathbf{v}_j = -\nabla y_j, \quad p_j = r_j \frac{\partial y_j}{\partial t}. \; (j = 1,2) \tag{2}$$

где $c_j = \sqrt{K_j / r_j}$, K_j– модули упругости жидкости в верхнем и нижнем полупространствах с плотностями r_j (индексами j ($j = 1,2$) обозначены параметры, которые соответствуют областям Ω_1 и Ω_2).

На поверхности раздела $x_3 = h/2$ и $x_3 = -h/2$ выполняются условия сопряжения

$$s_{13} = 0, \quad s_{33} = -p_j, \quad (v_3)_j = \partial u/\partial t \quad \text{при} \quad x_3 = \pm h/2. \tag{3}$$

С учетом соотношения Гука граничные условия (3) принимают вид

$$2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 x}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 x}{\partial x_3^2} = 0 , \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x_3} + \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial x_1} + \frac{\partial y_j}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{l}{G}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}\right) + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 x}{\partial x_1 \partial x_3}\right) = -r_j \frac{\partial y_j}{\partial t}. \tag{4}$$

На бесконечности выполняются условия излучения и ограниченности Зоммерфельда.

Безразмерные величины введены с характерными параметрами: длина h, плотность r, скорость волн сдвига $c_s = (G/r)^{1/2}$.

Решение представляется в классе бегущих волн

$$f(x_1, x_3, t) = F(x_3)\exp(i(kx_1 - wt)). \tag{5}$$

Подставляя (5) в уравнения (1), (2) и граничные условия (4), приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2\Phi}{dx_3^2} - \Phi\left(k^2 - \frac{w^2}{c_*^2}\right) = 0, \qquad c_*^2 = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x_3^i \tag{6}$$

$$\frac{d^2\Xi}{dx_3^2} - \Xi\left(k^2 - \frac{w^2}{c_s^2}\right) = 0, \qquad \frac{d^2\Psi_j}{dx_3^2} - \Psi_j\left(k^2 - \frac{w^2}{c_{0j}^2}\right) = 0 \tag{7}$$

с условиями сопряжения на поверхностях раздела $x_3 = \pm h/2$.

$$2ik\frac{d\Phi}{dx_3} - k^2\Xi - \frac{d^2\Xi}{dx_3^2} = 0 \qquad -iw\frac{d\Phi}{dx_3} - kw\Xi + \frac{d\Psi_j}{dx_3} = 0 \tag{8}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} b_i x_3^i \cdot \frac{d\Phi}{dx_3^2} - \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i x_3^i - 2\right)k^2\Phi + 2ik\frac{d\Xi}{dx_3} - iwr_j\Psi_j = 0 \tag{9}$$

Уравнение (6) является уравнением с переменными коэффициентами, для решения которого применим метод степенных рядов. Представим решение в виде $\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_3^n$ и подставим его в уравнение (6). Перемножив ряды, получим следующее уравнение:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left[\sum_{i=0}^{\infty} b_i(n+1-i)(n+2-i)a_{n+2-i} - k^2\sum_{i=0}^{\infty} b_i a_{n-i} + w^2 a_n\right]x_3^n = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при равных степенях x_3 нулю, получим бесконечную систему рекуррентных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=0}^{\infty} b_i(n+1-i)(n+2-i)a_{n+2-i} - k^2\sum_{i=0}^{\infty} b_i a_{n-i} + w^2 a_n = 0 \quad (n = \overline{0,\infty})$$

Отсюда получаем рекуррентные формулы, которые связывают все коэффициенты

$$a_{n+2} = -\frac{1}{b_0(n+1)(n+2)}\left[\sum_{i=1}^{\infty} b_i(n+1-i)(n+2-i)a_{n+2-i} - k^2\sum_{i=0}^{\infty} b_i a_{n-i} + w^2 a_n\right] \tag{10}$$

Из рекуррентной формулы (10) методом математической индукции можно показать, что каждый коэффициент a_n можно выразить через a_0 и a_1 как сумму двух функций, каждая из которых зависит только от a_0 или a_1. Введем новые функции $g_n^* = g_n^*(a_0)$ и $V_n^* = V_n^*(a_1)$, такие что

$$a_n(a_0,\, a_1) = g_n^*(a_0) + V_n^*(a_1) \quad (n = \overline{0,\infty}), \tag{11}$$
$$g_1^* = V_0^* = V_2^* = 0, \quad V_1^* = a_1, \quad g_0^* = a_0$$

Подставим (11) в формулу (10) и после преобразований получим

$$a_{n+2} = -\frac{1}{b_0(n+1)(n+2)}\left[\sum_{i=1}^{\infty} b_i(n+1-i)(n+2-i) g_{n+2-i}^* - k^2 \sum_{i=0}^{\infty} b_i g_{n-i}^* + w^2 g_n^*\right] - \tag{12}$$
$$-\frac{1}{b_0(n+1)(n+2)}\left[\sum_{i=1}^{\infty} b_i(n+1-i)(n+2-i) V_{n+2-i}^* - k^2 \sum_{i=0}^{\infty} b_i V_{n-i}^* + w^2 V_n^*\right].$$

Отсюда следует, что функцию g_n^* можно выразить через предыдущие g_j^* $(j = \overline{0, n-1})$

$$g_{n+2}^* = -\frac{1}{b_0(n+1)(n+2)}\left[\sum_{i=1}^{\infty} b_i(n+1-i)(n+2-i) g_{n+2-i}^* - k^2 \sum_{i=0}^{\infty} b_i g_{n-i}^* + w^2 g_n^*\right], \tag{13}$$

а V_n^* через V_j^* $(j = \overline{0, n-1})$

$$V_{n+2}^* = -\frac{1}{b_0(n+1)(n+2)}\left[\sum_{i=1}^{\infty} b_i(n+1-i)(n+2-i) V_{n+2-i}^* - k^2 \sum_{i=0}^{\infty} b_i V_{n-i}^* + w^2 V_n^*\right]. \tag{14}$$

Из (13) видно, что все $g_0^*, g_1^*, ..., g_{n+2}^*$ последовательно выражаются через a_0, а из (14), что все $V_0^*, V_1^*, ..., V_{n+2}^*$ – через a_1. Следовательно, решение уравнения (6) представляется в виде

$$\Phi = a_0 f_1 + a_1 f_2, \tag{15}$$

где $f_1 = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x_3^n$, $g_n = \frac{g_n^*}{a_0}$ $(n = \overline{0,\infty})$, $f_2 = \sum_{n=0}^{\infty} V_n x_3^n$, $V_n = \frac{V_n^*}{a_0}$ $(n = \overline{0,\infty})$.

Если функция неоднородности четная, тогда $b_{2i+1} = 0$ $(i = \overline{0,\infty})$.Учитывая, что $g_1^* = 0$ и $V_0^* = V_2^* = 0$, а также рекуррентные формулы (13) и (14), имеем $g_{2k+1} = 0$, $V_{2k+1} = 0$ $(k = \overline{0,\infty})$. При этом

$$\Phi = a_0 f_1 + a_1 f_2, \quad f_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n}}{a_0} x_3^{2n}, \quad f_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_1} x_3^n. \tag{16}$$

Переход от неоднородного слоя к однородному можно получить, полагая $b_0 = c_e^2 = const$, $b_i = 0$, $(i = \overline{1,\infty})$.

Переобозначим величины a_0 и a_1 в $a_0 = C_1$, $a_1 = C_2$ и перепишем (15) в виде

$$\Phi(x_3) = C_1 f_1 + C_2 f_2. \tag{17}$$

Решения уравнений (7) с учетом условий Зоммерфельда записываются в виде

$$\Xi(x_3) = C_3 e^{l_1 x_3} + C_4 e^{-l_1 x_3}, \quad \Psi_1(x_3) = C_5 e^{l_2 x_3}, \quad \Psi_2(x_3) = C_6 e^{-l_3 x_3}, \tag{18}$$

где $$l_1^2 = k^2 - \frac{w^2}{c_s^2}, \quad l_2^2 = k^2 - \frac{w^2}{c_1^2}, \quad l_3^2 = k^2 - \frac{w^2}{c_2^2}.$$

Подставляя решения (17), (18) в граничные условия (4), приходим к системе шести уравнений относительно постоянных C_i $(i = \overline{1,6})$. Приравнивая нулю определитель этой системы, приходим к дисперсионному уравнению. Запишем его в виде

$$\begin{vmatrix} d_1\Gamma_{10} & 0 & d_2\Lambda_{10} & d_3 ch\frac{p}{l}a_2 & 0 & 0 \\ 2\breve{S}_g & 0 & 2\breve{S}_V & d_4 sh\frac{p}{l}a_2 & Pr_- & Pr_+ \\ d_2\Gamma_{10} & 0 & d_2\Lambda_{10} & d_5 ch\frac{p}{l}a_2 & A_- & A_+ \\ d_1\Gamma_{11} & d_3 sh\frac{p}{l}a_2 & d_2\Lambda_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 2\breve{C}_g & d_4 ch\frac{p}{l}a_2 & 2\breve{C}_V & 0 & Pr_+ & Pr_- \\ d_2\Gamma_{11} & d_5 sh\frac{p}{l}a_2 & d_2\Lambda_{11} & 0 & A_+ & A_- \end{vmatrix} = 0 \qquad (19)$$

где коэффициенты представляются в виде бесконечных сумм вида (приведем только некоторые из них)

$$\breve{C}_g = \sum_{i=0}^{\infty} b_{2i}\left(\frac{h}{2}\right)^{2i}\left[\Gamma_{20} - \left(\frac{2p}{l}\right)^2 \Gamma_{00}\right] + \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{2i+1}\left(\frac{h}{2}\right)^{2i+1}\left[\Gamma_{21} - \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \Gamma_{01}\right] + 2\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \Gamma_{00},$$

$$\Gamma_{00} = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_{2i}\left(\frac{h}{2}\right)^{2i}, \ \Gamma_{01} = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_{2i+1}\left(\frac{h}{2}\right)^{2i+1},$$

$$\Gamma_{20} = \sum_{i=0}^{\infty} (2i+1)(2i+2)\gamma_{2i+2}\left(\frac{h}{2}\right)^{2i}, \ \Gamma_{21} = \sum_{i=0}^{\infty} (2i+2)(2i+3)\gamma_{2i+3}\left(\frac{h}{2}\right)^{2i+1},$$

$$g_{n+2} = -\frac{1}{b_0(n+1)(n+2)}\left[\sum_{i=1}^{\infty} b_i(n+1-i)(n+2-i)g_{n+2-i} - \left(\frac{2p}{l}\right)^2\left[\sum k^2 b_i a_{n-i} + w^2 g_n\right]\right],$$

$$d_1 = 4i\frac{2p}{l}, \quad d_2 = -2i\frac{2p}{l}c, \quad d_3 = -4\left(\frac{2p}{l}\right)^2(2 - c^2), \ d_4 = 8i\left(\frac{2p}{l}\right)^2 a_2,$$

$$d_5 = 4\left(\frac{2p}{l}\right)^2 c, \ P = -i\frac{2p}{l}, \quad r_- = (r_0 - r_2), \quad r_+ = (r_0 + r_2),$$

$$A_- = \frac{2p}{l}(a_4 - a_3), \quad A_+ = -\frac{2p}{l}(a_4 + a_3), \quad a_i = \frac{l_i}{2pl}, \quad (i = \overline{1,4}).$$

Для оценки влияния неоднородности было проведено сравнение с гидроупругой системой, в которой упругий слой однородный. Значения параметров соответствующего однородного слоя приняты следующие $E/K_j = 36$ $(j = 1,2)$, $\nu = 0.3$, $r_1/r = 0.09$, $r_2/r = 0.18$, что соответствует системе "вода – сталь – бензин". Функция неоднородности $\lambda(x_3)$ задавалась двумя разными способами так, чтоб наибольшие значения коэффициента объемного расширения $\lambda(x_3)$ неоднородной упругой среды отличались от его значения в однородной упругой среде λ_0 не более, чем на 10%

$$\lambda_k(x_3)/G = \lambda_0(1 + \alpha_k \cos(\pi x_3))/G, \tag{20}$$

где $a_k = +0{,}1; -0{,}1 (k = 1,2)$.

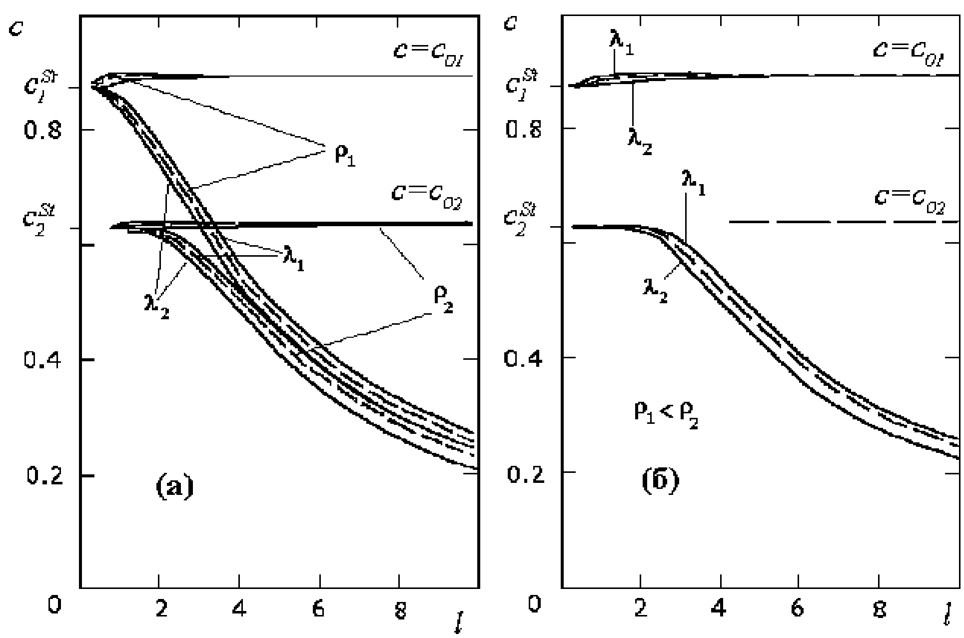


Рис.2

На рис.2 представлена зависимость значений фазовой скорости от длины волны: на рис.2a для случая неоднородного слоя (сплошные кривые с индексом λ_1 и λ_2) и однородного слоя (пунктир) между одинаковыми жидкостями ($\rho_1 = \rho_2 = 0.09$ – индекс ρ_1, $\rho_1 = \rho_2 = 0.18$ – индекс ρ_2); на рис.2*б* для случая неоднородного слоя (сплошные кривые с индексом λ_1 и λ_2) и однородного слоя (пунктир) между разными жидкостями ($\rho_1 = 0.09, \rho_2 = 0.18$).

Рассмотренные случаи неоднородности (20) допускают симметричные и антисимметричные колебания при условии одинаковых свойств жидких сред. Численный анализ дисперсионных уравнений показал, что поведение дисперсионных кривых в случае неоднородного слоя качественно совпадает с аналогичным случаем, когда слой был однородным [6]. Видно, что выпуклая неоднородность λ_1, которая возрастает при приближении к середине слоя и такая, что имеет там наибольшие значения, увеличивает фазовые скорости, а вогнутая неоднородность λ_2, которая имеет на середине слоя минимум, уменьшает фазовые скорости.

Для жидкостей с разной плотностью дисперсионные уравнения не распадаются на два независимых, при этом имеет два разных корня,

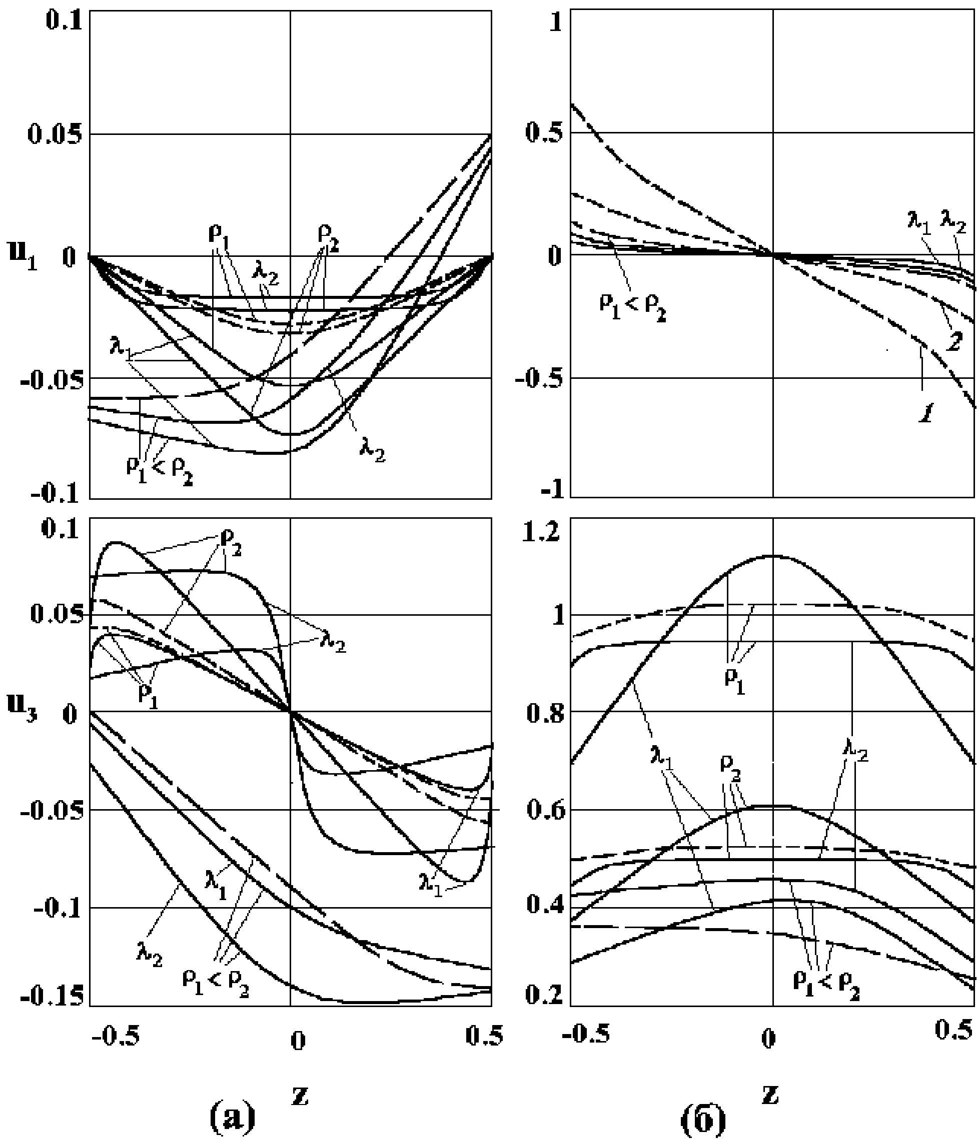


Рис.3

которые удовлетворяют условию $c<c_{01}$, которые соответствуют квазисимметричным и квазиантисимметричным колебаниям (сплошные кривые на рис.2*б*). Влияние характера неоднородности λ_1 и λ_2 проявляется, соответственно, в увеличении и уменьшении фазовых скоростей. Так же, как и в случае однородного слоя, полный анализ дисперсионного уравнения в случае разных жидкостей показал, что при

$c_{02} < c_{01} < c_s < c_e$ не существует гармонических волн вида (20), которые имели бы фазовую скорость $c_2^{St} < c < c_1^{St}$.

На рис.3 представлены волновые моды в упругом слое для u_1, u_3, σ_{13}, σ_{33} (рис.4) при $l = 2.5$. Симметричные и квазисимметричные

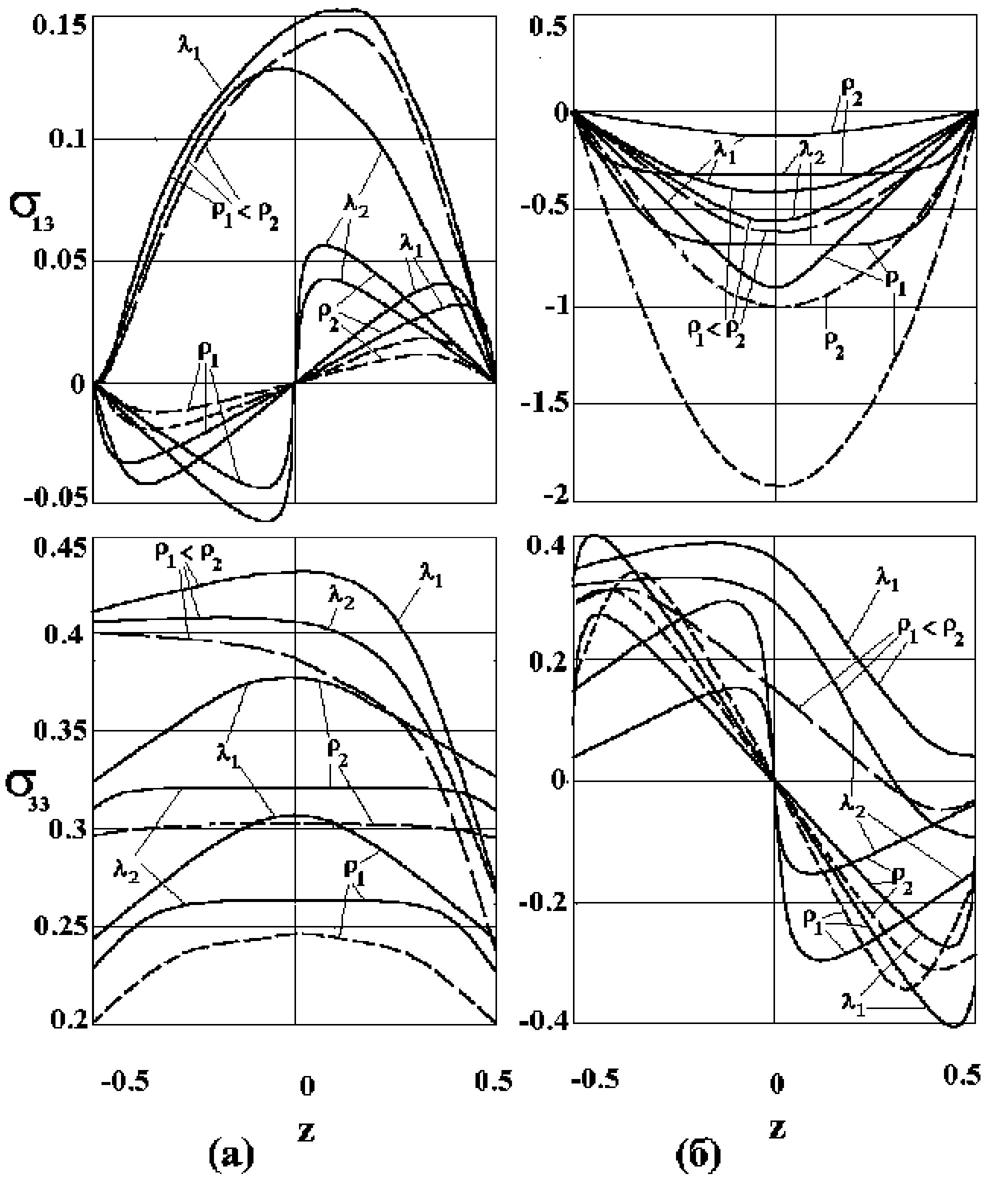


Рис. 4

моды колебаний изображены на рис.3*а*, 4*а*, антисимметричные и квазиантисимметричные – на рис.3*б*, 4*б*.

В случае одинаковых жидкостей влияние вогнутой неоднородности λ_2 вызывает смещение к середине слоя экстремальных значений мод колебаний, и, как следствие, наблюдаются резкие изменения перемещений и напряжений в малой окрестности $x_3 = 0$. Выпуклая неоднородность λ_1 вызывает противоположные явления – экстремальные значения смещаются от середины слоя к поверхностям контакта с жидкими средами $x_3 = \pm h/2$, при этом резкие изменения характеристик упругого слоя имеют место вблизи его границ.

При условии разных плотностей жидкостей возникает существенное нарушение симметричных и антисимметричных зависимостей компонент смещений и напряжений от вертикальной координаты. Аналогично случаю однородного слоя, при квазисимметричных и квазиантисимметричных колебаниях абсолютные значения на границах контакта упругой и жидкой среды $x_3 = \pm h/2$ разные, в то время как при симметричных и антисимметричных одинаковые. Исключения составляют только зависимость σ_{13}, значения которой на поверхностях контакта равна нулю соответственно граничному условию $s_{13} = 0$.

Список использованной литературы

1. Викторов И.А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. – М., 1966. – 168 с.

2. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев, 1981. – 283 с.

3. Селезов И.Т. Моделирование волновых и дифракционных процессов в сплошных средах. – Киев, 1989. – 204 с.

4. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. – М., 1973. – 344 с.

5. Авраменко О.В, Селезов И.Т. Распространение волн в упругом слое, помещенном между различными жидкими средами // Акустичний вісник. – 1999. – №3. – Р. 3–10.

6. Селезов И.Т., Авраменко О.В. Распространение гидроупругих волн в упругом или жидком слое, контактирующем с внешней средой // Гидромеханика. – 1993. – 68. – С. 15–20.

7. Seemann W., Wauer J. Fluid-structural coupling of vibration bodies in a surrounding confined liquid // Zeitschrift Fur Angewandte Math. Mech. (West Germany). – 1996. – **76**(2). – С. 67–79.

8. Hawwa M.A., Nayfeh *A.H.* Flexural wave propagation in a fluid loaded plate with periodically varying rigidity // Trans. ASME. J. Vib. Acoust. – 1997. – 119(3). – С. 415–-419.

9. Селезов И.Т., Авраменко О.В. Распространение волн в помещенном в жидкость в упругом слое с пустотами // Мат. методи та фіз.-мех.поля. – 1997. – №1. – С. 90–96.

10. Tang Wenyong, Chen Tieyun Analysis for fluid-structure interaction vibration of laminated composite ship panels // J. Shanghay Jiaotong Univ. – 1997. – 31(11). – С. 112–115.

11. Habault D., Filippi P.G.T. Light fluid approximation for sound radiation and diffraction by thin elastic plates // J. Sound. Vibr. – 1998. – 213(2). – С. 333–374.

12. Yu Soumian, Yang Pihua, Yu Tian Resonanse theory of elastic head waves propagating in a solid layer in tight contact with a thic solid base // J. Vib. and Control. – 1998. – 4(3). – С. 219–236.
13. Zhemin Zhu, Xiaoliang Zhao, Gonghuan Du Theory of acoustic streaming generated by ultrasonic Lamb waves // J. Acoust. Soc. Amer. – 1998. – 104(1). – С. 89–90.
14. Авраменко О.В., Селезов И.Т. Распространение волн вдоль упругого неоднородного слоя в жидкости // Изв. РАН. МТТ. – 1996. – №6. – С. 172–182.
15. Hook J.F. Separation of the vector wave equation of elasticity for certain types of inhomogeneous, isotropic media // J.Acoust. Soc. America. – 1961. – **33**, №3. – С.302–313.

Поступила в редколлегию 14.04.2000