тодами выполнить локальный анализ критерия абсолютной устойчивости.

Список использованной литературы

1. Справочник по теории автоматического управления. Под ред. А. А. Красовского – М.:Наука, ГРФМЛ, 1987.–711 с.
2. А.А. Воронов. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость.– М.:Наука, ГРФМЛ, 1979. – 335 с.
3. А.Т. Барабанов. Алгебраические критерии абсолютной устойчивости // Динам. системы –1999.– вып.15.– С. 3–13.
4. А.Т. Барабанов. Анализ распределения корней многочлена на основе обобщенной схемы Рауса. // Динам. системы – 1994. – вып.13.– С. 107–118.

Поступила в редколлегию 17.12.99

УДК 517.925

С. К. ПЕРСИДСКИЙ, доктор физ.–мат. наук, Таврический нац. ун-т

ПРИМЕНЕНИЕ КВАЗИОДНОРОДНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ К НЕКОТОРЫМ ЗАДАЧАМ УСТОЙЧИВОСТИ

Введенные в рассмотрение автором работы квазиоднородные многочлены, в частности квазиквадратичные формы [1,2], применяются к исследованию некоторых задач устойчивости: исследуется устойчивость систем дифференциальных уравнений с квазиоднородными правыми частями; для одного класса существенно нелинейных систем специального вида приведены теоремы аналогичные теоремам Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Для таких систем рассмотрены несколько задач, которые можно отнести к критическим случаям по отношению к исследуемой нелинейной системе дифференциальных уравнений.

1. Системы дифференциальных уравнений с квазиоднородными правыми частями. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} x' = P_{n-1}(j\,(x), y\,(y)) \\ y' = Q_{n-1}(j\,(x), y\,(y)) \end{cases}, \qquad (1.1)$$

где $j\,(x)$ и $y\,(y)$ – непрерывные функции, удовлетворяющие неравенствам $j\,(x)x > 0$ при $x \neq 0$; $y\,(y)y > 0$ при $y \neq 0$, а правые части которой являются квазиоднородными многочленами нечетной степени $n-1$ следующего вида:

$$P_{n-1}(j\,(x), y\,(y)) = a_0 j\,(x)^{n-1} + a_1 j\,(x)^{n-2} y\,(y) + \ldots + a_{n-1} y\,(y)^{n-1},$$

$$Q_{n-1}(j\,(x), y\,(y)) = b_0 j\,(x)^{n-1} + b_1 j\,(x)^{n-2} y\,(y) + \ldots + b_{n-1} y\,(y)^{n-1}.$$

Заметим, что системы дифференциальных уравнений с однородными правыми частями рассматривались многими авторами, например, в работе [3].

Для исследования устойчивости системы (1.1) возьмем знакоопределенную положительную функцию $V(x,y)$ следующего вида:

$$V(x,y) = a\int_0^x j\,(t)dt + b\int_0^y y\,(t)dt, \text{ где } a > 0, b > 0.$$

Тогда

$$V'_{(1.1)} = j\,(x)P_{n-1}(j\,(x), y\,(y)) + y\,(y)Q_{n-1}(j\,(x), y\,(y)) = d_0 j\,(x)^n +$$
$$+ d_1 j\,(x)^{n-1} y\,(y) + \ldots + d_n y\,(y)^n$$

Из результатов нашей работы [1] следует, что функция $V'_{(1.1)}$ указанного вида будет знакоопределенной отрицательной функцией тогда и только тогда, когда уравнение

$$R_n(m) = \sum_{s=0}^{n} d_s m^{n-s} = 0$$

не имеет вещественных корней и $d_0 < 0, d_n < 0$. Таким образом, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 1.1. *Нулевое решение x=y=0 системы* (1.1) *с квазиоднородными правыми частями будет абсолютно устойчиво, то есть асимптотически устойчиво в целом при любых непрерывных функциях* $j\,(x)$ *и* $y\,(y)$, *сохраняющих знаки своих аргументов, если выполняются следующие два условия:*

1) $\int_0^x j\,(t)dt \to \infty$ *при* $|x| \to \infty$, $\int_0^y y\,(t)dt \to \infty$ *при* $|y| \to \infty$;

2) уравнение $R_n(m) = 0$ *не имеет вещественных корней и* $d_0 < 0, d_n < 0.$

Действительно, $V(x,y) \to \infty$ при $x^2 + y^2 \to \infty$ и $V'_{(1.1)} < 0$ в R^2, таким образом, будут выполнены все условия известной теоремы Барбашина–Красовского об асимптотической устойчивости в целом.

Теорема 1.2. *Если при некоторых вещественных* a *и* b, *где* $\max\{a,b\} > 0$, *рассмотренное выше уравнение* $R_n(m) = 0$ *не имеет вещественных корней и* $d_0 > 0, d_n > 0$, *то решение* $x = y = 0$ *системы* (1.1) *абсолютно неустойчиво, то есть неустойчиво при любых непрерывных функциях* $j\,(x)$ *и* $y\,(y)$, *сохраняющих знаки своего аргумента.*

Проиллюстрировать теорему 1.1 можно рассмотрением следующего примера. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с квазиоднородными правыми частями

$$\begin{cases} x' = -j(x)^3 + 2j(x)^2 y(y) + 2y(y)^3, \\ y' = -3j(x)^2 y(y) - 2y(y)^3. \end{cases}$$

Возьмем $V(x,y) = \int_0^x j(t)dt + \int_0^y y(t)dt$. Тогда в силу рассматриваемой системы

$$V' = -j(x)^4 + 2j(x)^3 y(y) - 3j(x)^2 y(y)^2 + 2j(x)\, y(y)^3 - 2y(y)^4.$$

Нетрудно видеть, что многочлен $R_4(m) = -(1+m^2)(m^2 - 2m + 2)$ не имеет вещественных корней, причем $d_0 < 0, d_4 < 0$.

Если при этом $\int_0^x j(t)dt \to \infty$ при $|x| \to \infty$, и

$$\int_0^y y(t)dt \to \infty \text{ при } |y| \to \infty,$$

то рассматриваемая система устойчива абсолютно.

2. Исследование устойчивости одного класса нелинейных систем дифференциальных уравнений. Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$x' = Pj(x) + R(j(x)), \tag{2.1}$$

где P – вещественная постоянная матрица размерности $n \times n$, $j(x) = \mathrm{col}(j_1(x_1), ..., j_n(x_n))$; все функции $j_s(x_s)$ непрерывны и удовлетворяют неравенствам

$$j_s(x_s)x_s > 0 \text{ при } x_s \neq 0, \tag{2.2}$$

а векторная функция $R(j(x))$ удовлетворяет условию

$$\|R(j(x))\| = o(\|j(x)\|). \tag{2.3}$$

Систему уравнений

$$x' = Pj(x) \tag{2.4}$$

будем называть главной частью системы (2.1). Введем характеристическое уравнение

$$\Delta(l) = \det(P - lE) = 0$$

системы (2.4). Можно указать случаи, когда для системы (2.1) имеют место теоремы, аналогичные теоремам Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Пусть $K(a_1, ..., a_n)$ – конус в пространстве R^n с параметрами a_s [4]. Например, неотрицательный октант $K_+^n : x_s \geq 0\, (s = \overline{1,n})$ имеет параметры $a_s = 1$. Следуя работе [5], будем называть матрицу P системы (2.4) квазипозитивной, если элементы матрицы P и параметры некоторого конуса $K(a_1,...,a_n)$ связаны неравенствами $P_{sk} a_s a_k \geq 0$ при $s \neq k$ $(s,k = \overline{1,n})$.

Теорема 2.1. *Пусть P – квазипозитивная матрица, если при этом все корни характеристического уравнения $\Delta(l) = 0$ системы (2.4) имеют отрицательные вещественные части, то в некоторой достаточно малой окрестности начала координат нулевое решение нелинейной системы* (2.1) *асимптотически устойчиво при любой векторной функции $R(j\,(x))$, удовлетворяющей условию* (2.3).

Доказательство. Найдем числа $b_1,...,b_n$ из системы алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} P_{ks} b_k a_k = -a_s a_s \quad (s = \overline{1,n}), \tag{2.5}$$

где a_s – любые заданные положительные числа.

Из результатов нашей работы [4] следует, что в рассматриваемом случае система (2.5) однозначно разрешима, причем все числа $b_s > 0$.

Заметим, что систему (2.5) можно записать в форме

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^{n} |P_{ks}| b_k + P_{ss} b_s = -a_s \quad (s = \overline{1,n}). \tag{2.6}$$

Введем функцию Ляпунова

$$V(x) = \sum_{s=1}^{n} b_s |x_s| = \sum_{s=1}^{n} b_s x_s \operatorname{sign}(x_s), \tag{2.7}$$

где $$\operatorname{sign}(x_s) = \begin{cases} 1, \text{ при } x_s \geq 0, \\ -1, \text{ при } x_s < 0. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что в силу системы (2.4)

$$V'_{(2.4)} \leq \sum_{s=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} |P_{ks}| b_k + P_{ss} b_s\Big) |j_s(x_s)| = -\sum_{s=1}^{n} a_s |j_s(x_s)|,$$

то есть система (2.4) асимптотически устойчива в целом [4]. Далее, найдем полную производную функции V вида (2.7) в силу полной системы (2.1):

$$V'_{(2.1)} \leq -\sum_{s=1}^{n} a_s |j_s(x_s)| + b \|R(j\,(x))\|,$$

где $b = \sum_{s=1}^{n} b_s$. В силу (2.3) заключаем о том, что в некоторой окрестности начала координат решение $x = 0$ системы (2.1) асимптотически устойчиво в целом.

Имеет место также следующая теорема.

Теорема 2.2. *Если характеристическое уравнение* $\Delta(l)=0$ *системы* (2.4) *имеет хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то нулевое решение нелинейной системы* (2.1) *неустойчиво при любой векторной функции* $R(j(x))$, *удовлетворяющей соотношению* (2.3).

Таким образом, для нелинейной системы (2.1) действительно имеют место теоремы, аналогичные известным теоремам Ляпунова об устойчивости и неустойчивости по первому приближению. Поэтому естественно рассмотреть для указанной системы некоторые задачи, которые можно отнести к критическим случаям.

Например, пусть характеристическое уравнение $\Delta(l)=0$ главной части системы (2.1) имеет один корень, равный нулю, а остальные корни с отрицательными вещественными частями. В этом случае система (2.4) имеет линейный интеграл вида

$$V(x)=\sum_{s=1}^{n} b_s x_s = \langle b, x\rangle .$$

Действительно, система однородных уравнений

$$P^T b = 0$$

допускает ненулевое решение $b_1,...,b_n$, где хотя бы одно $b_j \neq 0$.
В силу системы (2.4)

$$V'_{(2.4)}=\sum_{s=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} P_{ks} b_k) j_s(x_s)\equiv 0 .$$

Пусть найденный интеграл $V(x)$ системы (2.4) такой, что выражение $V'_{(2.1)}=\langle b, R(j(x))\rangle$ есть функция знакоопределенная, тогда решение $x\equiv 0$ системы (2.1) неустойчиво. Таким образом, вопрос об устойчивости системы (2.1) решается векторной функцией $R(j(x))$.

В качестве другого примера рассмотрим систему существенно нелинейных уравнений

$$\begin{cases} x_1' = ax_2^3-(x_1^4+x_2^6-x_3^6) \\ x_2' = -ax_1^3-x_2^2(x_1^4+x_2^6+3x_3^6-4x_4^8) \\ x_3' = bx_4^5-(-x_1^4+3x_2^6+10x_3^6+8x_4^8) \\ x_4' = -bx_3^5-x_4^2(-4x_2^6+8x_3^6+20x_4^8) \end{cases} . \tag{2.8}$$

Характеристическое уравнение главной части системы имеет две пары чисто мнимых корней:

$$l_{1,2}=\pm ai,$$
$$l_{3,4}=\pm bi,$$

то есть мы имеем критический случай двух пар чисто мнимых корней. В рассматриваемом случае главная часть системы допускает знакоопределенный положительный первый интеграл вида

$$V(x_1,x_2,x_3,x_4)=\frac{1}{4}x_1^4+\frac{1}{4}x_2^4+\frac{1}{6}x_3^6+\frac{1}{6}x_4^6.$$

В силу полной системы

$$V'_{(2.8)}=-(\mathbf{x_1^4},\mathbf{x_2^4},\mathbf{x_3^6},\mathbf{x_4^8})\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}&-\mathbf{1}&\mathbf{0}\\ \mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{3}&-\mathbf{4}\\ -\mathbf{1}&\mathbf{3}&\mathbf{10}&\mathbf{8}\\ \mathbf{0}&-\mathbf{4}&\mathbf{8}&\mathbf{20}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{x_1^4}\\ \mathbf{x_2^4}\\ \mathbf{x_3^6}\\ \mathbf{x_4^8}\end{pmatrix}$$

Нетрудно видеть, что $V_{(2.8)}'$ будет квазиквадратичной формой второго типа. Согласно результатам работы [2] $V_{(2.8)}'$ будет функцией отрицательной знакоопределенной в пространстве R^4, если квадратичная форма

$$W(x_1,x_2,x_3,x_4)=(\mathbf{x_1},\mathbf{x_2},\mathbf{x_3},\mathbf{x_4})\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}&-\mathbf{1}&\mathbf{0}\\ \mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{3}&-\mathbf{4}\\ -\mathbf{1}&\mathbf{3}&\mathbf{10}&\mathbf{8}\\ \mathbf{0}&-\mathbf{4}&\mathbf{8}&\mathbf{20}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{x_1}\\ \mathbf{x_2}\\ \mathbf{x_3}\\ \mathbf{x_4}\end{pmatrix}$$

будет положительной знакоопределенной в неотрицательном октанте K_+^4 пространства R^4. Следуя работе [2], умножим положительные недиагональные элементы матрицы B квадратичной формы на множитель $m\le 1$. Полученная матрица $B(m)$ будет положительной знакоопределенной в R^4, например при $m=0$, т.к. матрица $B(0)$ удовлетворяет критерию положительной знакоопределенности Сильвестра. Следовательно, $V'_{(2.8)}<0$ в R^4 и нулевое решение рассматриваемой системы асимптотически устойчиво в целом.

Список использованной литературы

1. Персидский С.К. О знакоопределенности квазиоднородных многочленов.// Динам. системы. – Симферополь: «Таврия», 1998. – Вып.14. – С. 29–35.
2. Персидский С. К. Об одном критерии знакоопределенности квадратичных и квазиквадратичных форм в конусе. // Динам. системы. – Симферополь: «КФТ», 1999. – Вып.15. – С. 14–19.
3. Утешев А. Ю., Шуляк С. Г. Критерий асимптотической устойчивости системы двух дифференциальных уравнений с однородными правыми частями.// Дифференциальные уравнения. –1987. – Т.23, N6. – С. 1009–1020.

4. Персидский С. К. К вопросу об абсолютной устойчивости.//Изв. АН СССР, Автоматика и телемеханика. – 1969. – N12. – С. 5–11.
5. Персидский С. К., Дремов С. Ю. Об устойчивости одной нелинейной системы дифференциальных уравнений.// Межд. сб. Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах. – 2(6). – Казань: КАИ, 1997. – С. 20–25.

Поступила в редколлегию 12.07.00