3. Oberle H.J. Numerical Computation of Singular Control Function for a Two–Link Robot Arm // Lecture Notes in Control and Information Sciences. – Vol. 95: Optimal control. – 1987. – Pp. 244–253.
4. Hart L.L. The Application of Projection–Iteration Methods to Solving Optimal Control Problems for Systems of Ordinary Differential Equations // Hamburger Beitrage zur Angewandten Mathematik. – Hamburg: Universitat Hamburg, 2000. – Preprint № 152. – 17 s.

Поступила в редколлегию 17.07.2000

УДК 517.432

Ю.П. МОСКАЛЕВА, ассист., Таврический нац. ун-т

ХАРАКТЕРИСТИКА КРАТНОСТИ НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА ОДНОГО КЛАССА ДИССИПАТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Для одного класса диссипативных квазиэрмитовых операторов вводится понятие кратности непрерывного спектра. В терминах неотрицательной компоненты полярного разложения разности предельных значений характеристической матрицы-функции приводится формула ее вычисления.

Предметом исследования настоящей работы является широкий класс диссипативных несамосопряженных неограниченных операторов, образующий подкласс класса квазиэрмитовых операторов, наиболее полный обзор свойств которых представлен в монографии А.В. Кужеля [1].

Замкнутый оператор A, действующий в гильбертовом пространстве H, называется квазиэрмитовым оператором ранга r (или K^r-оператором), если $A_0 = A|M_A$ – эрмитов оператор с индексом дефекта (r,r) $(0<r<+\infty)$ и $r(A)\neq Ш$, где $M_A=\{x\in D(A)|(Ax,y)= =(x,Ay)\forall y\in D(A)\}$ – область эрмитовости. Будем говорить, что оператор A является K_+^r-оператором (или принадлежит классу K_+^r), если A – диссипативный K^r-оператор, характеристическая матрица-функция которого $c_A(l)$ представима в виде

$$c_A(l)=\overset{\leftarrow}{\int_a^b}\exp\left[-i\frac{s^*(t)s(t)}{t-l}dt\right] \qquad (-\infty\leq a\leq b\leq+\infty),$$

где $\int_a^b\left\|s^*(x)s(x)\right\|dx<\infty$ (под нормой матрицы понимаем норму соответствующего преобразования в пространстве $\mathbf{l}_2^r$).

В случае конечномерного пространства общая кратность спектра оператора определяется как максимальная кратность его собственных значений. Это определение не переносится на произвольные операторы в пространстве Гильберта H. В случае самосопряженного оператора кратность спектра в книге Н. И. Ахиезера и И. М. Глазмана [2] определяется в терминах порождающего подпространства, т.е. такого подпространства G, что замыкание линейной оболочки множества $\{E(\Delta)G\}$ совпадает с H, где Δ пробегает совокупность всех интервалов числовой оси и E_t – спектральная функция. При этом кратностью (или общей кратностью) спектра самосопряженного оператора A называют минимальную размерность порождающего подпространства этого оператора. В том случае, когда у оператора A не существует конечномерных порождающих подпространств, кратность спектра оператора считается бесконечной.

По аналогии с теорией самосопряженных операторов Л.А. Сахнович вводит в работе [3] понятие порождающего подпространства и кратности спектра для определенных на всем пространстве несамосопряженных ограниченных операторов. В этом случае подпространство G называется порождающим, если замкнутая оболочка всех многообразий A^nG ($n = 0,1,2,...$) совпадает с H. Кратностью (или общей кратностью) спектра несамосопряженного определенного на всем пространстве ограниченного оператора A, как и в случае самосопряженных операторов, называют минимальную размерность порождающего подпространства оператора.

Введем понятие порождающего подпространства и кратности спектра для операторов класса K_+^r. Подпространство G будем называть порождающим, если замыкание линейной оболочки всех многообразий $R_{\pm i}^n(A)G$, ($n = 1,2,3,...$) совпадает с H. При этом определение кратности будет таким же, как и в случае самосопряженных операторов или несамосопряженных, определенных на всем пространстве, ограниченных операторов.

Определим для неограниченного оператора еще ряд понятий характеризующих спектр. Если оператор имеет инвариантные подпространства, то рассмотрим множество M_Δ всех индуцированных операторов со спектром, лежащим в некотором замкнутом множестве Δ. максимальную кратность спектра операторов A_Δ из M_Δ будем называть кратностью спектра оператора A на множестве Δ. Кратностью спектра оператора в точке l будем называть предел последовательности кратностей спектра оператора A в сегментах $\left[l-\frac{1}{n}, l+\frac{1}{n}\right]$ при $n \to \infty$.

Пусть $A\in K_+^r$, тогда простая часть оператора A унитарно эквивалентна модельному оператору $\mathbf{A}$, задаваемому равенством

$$(\mathbf{A}f)(x)=xf(x)+i\int_x^b f(x)s(t)s^*(x)dt, \qquad f\in L_2^r[a,b].$$

Область определения простой части оператора $\mathbf{A}$ равна $D(\mathbf{A})\subset H_{\mathbf{A}}$, где $H_{\mathbf{A}}$ есть замыкание линейного многообразия, в которое переходит $L_2^r[a,b]$ при умножении его элементов на $s^*(x)$ справа. При этом $H_{\mathbf{A}}$ совпадает с замыканием конечных линейных комбинаций векторов вида $R_{\pm i}^n(\mathbf{A})\left[hs^*(x)\right]$, $(n=1,2,3,...)$, h – произвольный фиксированный вектор из $\mathbf{l}_2^r$. Отсюда следует, что линейная комбинация строк матрицы-функции $s^*(x)$ образует порождающее подпространство, и что кратность спектра s простой части оператора $A\in K_+^r$ равна $s=vrai\max\limits_{a\le x\le b} rang\, s^*(x)$.

Из результатов статьи автора [4] следует, что для оператора $\mathbf{A}^*$ имеют место следующие соотношения

$$R_{\pm i}^n(\mathbf{A}^*)\left[hs^*(x)\right]=\frac{h}{2p}\frac{d}{dx}\int_a^x\frac{1}{(x\mp i)^n}G(x)U(x,x)dx\,s^{-1}(x), \quad (n=1,2,3,...),$$

где $G(x)$, $U(x,x)$ – соответственно неотрицательная и унитарная компоненты полярного разложения разности предельных значений характеристической матрицы-функции $\mathbf{A}^*$, т.е. $c_{\mathbf{A}}^{-1}(l)$. Приведенное равенство позволяет определить оператор

$$(Sj)(x)=\frac{1}{2p}\frac{d}{dx}\int_a^x j(x)U(x,x)dx\,s^{-1}(x),$$

где $j(x)=f(x)G(x)$ и $f(x)$ принадлежит линейному многообразию образующему плотное множество в пространстве $L_2^r[a,b]$. Оператор S определен на плотном в пространстве H_S множестве, где H_S – замыкание линейного многообразия, в которое переходит $L_2^r[a,b]$ при умножении его элементов на $G(x)$ справа.

Если матрица-функция $s^*(x)s(x)$ удовлетворяет условию

$$vrai\max_{a\le x\le b}\left\|s^*(x)s(x)\right\|<\infty,$$

то простая часть оператора $\mathbf{A}^*$ подобна оператору умножения на независимую переменную $Qj=xj(x)$.

Теорема. *Пусть* $A \in K_{+}^{r}$ *и имеет место оценка* $vrai \max\limits_{a \le x \le b} \left\| s^{*}(x) s(x) \right\| < \infty$. *Тогда кратность спектра* s *простой части оператора равна* $s = vrai \max\limits_{a \le x \le b} rang\, G_A(x)$, *где* $G_A(x)$ *– неотрицательная компонента полярного разложения разности предельных значений* $c_A^{\pm}(x) = \lim\limits_{t \to +0} c_A(l)$, $l = x \pm it$; a, b *такие, что* $-\infty \le a \le b \le +\infty$ *и* $c_A^{+}(x) = c_A^{-}(x)$ *для всякого* $x \notin [a,b]$.

Список использованной литературы

1. Kuzhel A. Characteristic Function and Models of Nonself – Adjoint Operators. – Kluwer: Dordrecht, 1996. – 237p.
2. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – Харьков: Вища школа, 1977. – Т.1. – 315 с.
3. Сахнович Л.А. Диссипативные операторы с абсолютно непрерывным спектром.//Труды моск. мат. об-ва , 1968. – Т. 19. – С. 211-270.
4. Москалева Ю.П. Неограниченные диссипативные операторы.//Труды математического факультета, 1997. – С. 88-89.

Поступила в редколлегию 25.09.2000