4. Разгулин А.В. Устойчивость бифуркационных автоколебаний в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом// Журнал вычислительной математики и математической физики. –1993. –Т. 33, N.10. –С. 1499–1508.
5. Ruzgulin A.V. Rotational multi-petal waves in optical system with 2-D feedback. – In Chaos in Optics. ed. Rajarshi Roy. Proceedings SPIE– 1993.– 2039– P. 342–352.
6. Skubachevskii A.L. Bifurcation of periodic solution for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics// Nonlinear Analisis. Theory. Methods & Applications. –1998.– Vol. 12, No.2. –P. 261 – 278.
7. Скубачевский А.Л. О бифуркации Хопфа для квазилинейного параболического-функциального-дифференциального уравнения// Дифференциальные уравнения.– 1998. –Т. 34, N.10. –С. 1394–1401.
8. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. : Пер. с англ. –М.: Мир, 1985. – 376 с.
9. Марсден Дж., Мак- Кракен М. Бифуркация рождения цикла и её приложения. – : Пер. с англ. М.: Мир, 1980. – 368 с.
10. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. –М.: Наука, 1978. – 304 с.
11. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. – : Пер. с англ. М.: Мир, 1985. – 280 с.
12. Николис Г., Пригожин Н. Самоорганизация в неравновесных системах: От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации. – : Пер. с англ. М.: Мир, 1979. – 512 с.

Поступило в редколлегию 16.06.2000

УДК 519.21

А.И. КОВАЛЕНКО, канд. физ.-мат. наук, В.П.СМОЛИЧ, канд.физ.-мат. наук..
Таврический нац. ун-т.

АНАЛИЗ НАДЕЖНОСТИ ДВУХЭЛЕМЕНТНОЙ СИСТЕМЫ, ОБСЛУЖИВАЕМОЙ ДВУМЯ НАЛАДЧИКАМИ.

Получены стационарные вероятности состояний системы, коэффициент готовности и средняя наработка между отказами при приоритетном обслуживании.

1. Постановка задачи. Изучается система, состоящая из двух одинаковых элементов, каждый из которых может находиться в двух состояниях: работоспособном и неработоспособном. Распределение времени отказов – экспоненциальное, a – интенсивность отказа каждого из рассматриваемых элементов. Два наладчика осуществляют приоритетное обслуживание системы. Один из наладчиков (первый) является главным (мастером), а второй помощником (стажером), распределения времени ремонта произвольные: $m_0(x)$ – интенсивность ремонта любого элемента мастером и $m_1(x)$ – соответственно стажером.

Система считается работоспособной, если работоспособен хотя бы один из составляющих её элементов.

Введем следующие правила обслуживания системы, при этом занумеруем возможные состояния системы:

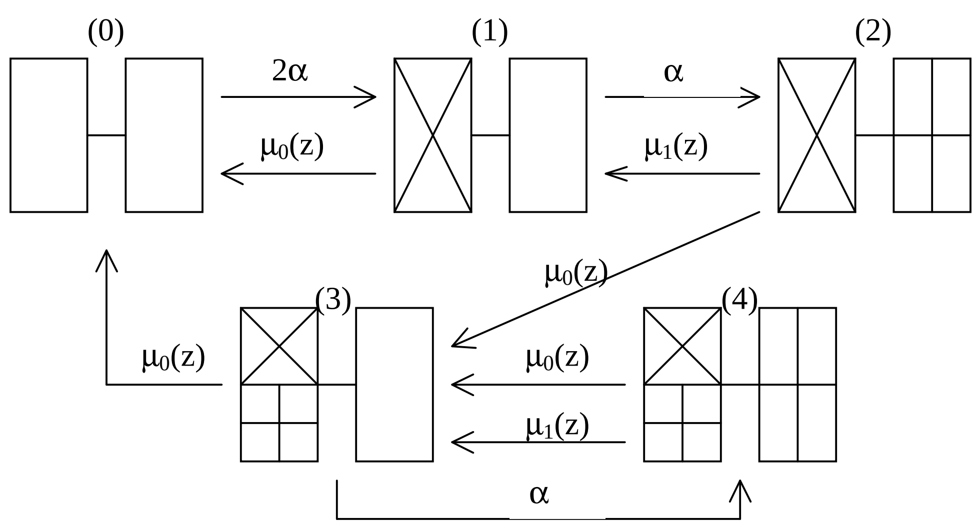
1) При отказе одного из элементов, находившейся состоянии (0) (оба элемента работоспособны) системы, его ремонтом начинает заниматься мастер, при этом полученное состояние системы обозначим через (1).

2) При отказе второго элемента в состоянии (1) его ремонтом начинает заниматься стажер, при этом полученное состояние системы обозначим через (2).

3) Если в состоянии (2) мастер отремонтировал свой элемент, то он отстраняет от ремонта другого элемента стажёра (с сохранением времени, потраченного на ремонт стажером) и преступает к ремонту. Полученное состояние системы обозначим через (3).

4) Если в состоянии (3) отказывает работоспособный элемент, то его начинает ремонтировать стажёр, и это состояние системы обозначим через (4).

Диаграмма переходов в различные состояния системы выглядит довольно просто:



Определим случайный процесс $x(t)$ фазовое пространство которого состоит из одной точки $0=(0)$, одной полупрямой: $1=((1),w_0)$, двух четвертьплоскостей: $2=((2),w_0,w_1)$, $3=((3),w_0,w_2)$ и одной восьмой пространства: $4=((4),w_0,w_2,w_1)$, где через w_0 обозначено время обслуживания элемента мастером, через w_1 – стажером, а через w_2 – отложенное время ремонта, затраченное стажером. Заметим, что $w_0>w_1$.

Введем функции:

$p_k(t)=P\{x(t)=k\}, k=0,1,2,3,4$

$Q_1(t,z)=P\{x(t)=1,w_0<z\},\quad Q_2(t,z,x)=P\{x(t)=2,w_0<z,w_1<x\}$,

$Q_3(t,z,y)=P\{x(t)=3,w_0<z,w_2<y\}$,

$Q_4(t,z,x,y)=P\{x(t)=4,w_0<z,w_2<y,w_1<x\}$,

где $P(A)$ – вероятность события A.

Обозначим плотности вероятностей через:

$$q_1(t,z)=\frac{\partial Q_1(t,z)}{\partial z}\qquad q_2(t,z,x)=\frac{\partial^2 Q_2(t,z,x)}{\partial z\partial x}$$

$$q_3(t,z,y)=\frac{\partial^2 Q_3(t,z,y)}{\partial z\partial y}\qquad q_4(t,z,y,x)=\frac{\partial^3 Q_4(t,z,y,x)}{\partial z\partial y\partial x}$$

Заметим, что при $z<x$ $q_2(t,z,x)=0$ и $q_4(t,z,y,x)=0$ имеют место соотношения:

$$p_1(t)=Q_1(t,\infty)=\int_0^\infty q_1(t,x)dx, \tag{1}$$

$$p_2(t)=Q_2(t,\infty,\infty)=\int_0^\infty dx\int_0^z q_2(z,x,t)dz \tag{2}$$

$$p_3(t)=Q_3(t,\infty,\infty)=\int_0^\infty dy\int_0^\infty q_3(t,z,y)dz \tag{3}$$

$$p_4(t)=Q_4(t,\infty,\infty,\infty)=\int_0^\infty dy\int_0^\infty dz\int_0^z q_4(t,z,y,x)dx \tag{4}$$

Вероятностные рассуждения и предельные переходы дают следующие интегро-дифференциальные уравнения и граничные условия:

$$\frac{d\mathrm{p}_0(t)}{dt}+2\alpha p_0(t)=\int_0^\infty q_1(t,z)\mu_0(z)dz+\int_0^\infty dy\int_0^\infty q_3(t,z,y)\mu_0(z)dz \tag{5}$$

$$\frac{\partial q_1(t,z)}{\partial z}+\frac{\partial q_1(t,z)}{\partial t}+(\alpha+\mu_0(z))q_1(t,z)=\int_0^z q_2(t,z,x)\mu_1(x)dx \tag{6}$$

$$\frac{\partial q_2(t,z,x)}{\partial z}+\frac{\partial q_2(t,z,x)}{\partial x}+\frac{\partial q_2(t,z,x)}{\partial t}+(\mu_0(z)+\mu_1(x))q_2(t,z,x)=0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial q_3(t,z,y)}{\partial z}+\frac{\partial q_3(t,z,y)}{\partial t}+(\alpha+\mu_0(z))q_3(t,z,x)=\int_0^z q_4(t,z,y,x)m_1(x)dx, \quad (8)$$

$$\frac{\partial q_4(t,z,y,x)}{\partial z}+\frac{\partial q_4(t,z,y,x)}{\partial x}+\frac{\partial q_4(t,z,y,x)}{\partial t}+ \quad (9)$$
$$+(\mu_0(z)+\mu_1(x))q_4(t,z,y,x)=0,$$

$$q_1(t,0)=2\alpha\, p_0(t), \qquad q_2(t,z,0)=\alpha\, q_1(t,z), \quad (10)$$

$$q_3(t,0,y)=\int_y^\infty q_2(t,z,y)\,\mu_0(z)dz+\int_0^\infty dv\int_y^\infty q_4(t,z,v,y)m_0(z)dz, \quad (11)$$

$$q_4(t,z,y,0)=a\; q_3(t,z,y). \quad (12)$$

Аналитическое решение данной системы удалось получить для частного случая: когда распределения времени ремонта мастером и стажером экспоненциальные, т.е. $m_0(x)=m_0=const$ и $m_1(x)=m_1=const$. Один из возможных методов решения опирается на эргодичность рассматриваемого процесса, переход к пределу при $t\to+\infty$ уменьшает количество аргументов рассматриваемых функций (см., например, [4]). Мы здесь предпочли другой метод (см.[3]) т.к. на определенном этапе вычислений появляется возможность осуществить контроль (проверку).

Определим начальные условия из предположения, что при $t=0$ система находится в состоянии 0, т.е. $p_0(0)=1$, $q_1(0,z)=0$, $q_2(0,z,x)=0$, $q_3(0,z,y)=0$, $q_4(0,z,y,x)=0$.

Применим преобразование Лапласа к соотношениям (5–12), (по переменной t), обозначая через $l=s+m_0+m_1$:

$$(s+2\alpha)\overline{p_0}(s)-1=\mu_0\int_0^\infty \overline{q_1}(s,z)dz+\mu_0\int_0^\infty dy\int_0^\infty \overline{q_3}(s,z,y)dz, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \overline{q_1}(s,z)}{\partial z}+(\lambda+a-m_1)\overline{q_1}(s,z)=\mu_1\int_0^z \overline{q_2}(s,z,x)dx, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \overline{q_2}(s,z,x)}{\partial z}+\frac{\partial \overline{q_2}(s,z,x)}{\partial x}+\lambda\overline{q_2}(s,z,x)=0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \overline{q_3}(s,z,y)}{\partial z}+(\lambda+a-m_1)\overline{q_3}(s,z,y)=\mu_1\int_0^z \overline{q_4}(s,z,y,x)dx, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \overline{q_4}(s,z,y,x)}{\partial z}+\frac{\partial \overline{q_4}(s,z,y,x)}{\partial x}+\lambda\overline{q_4}(s,z,y,x)=0, \quad (17)$$

$$\overline{q_1}(s,0)=2\alpha\,\overline{p_0}(s), \qquad \overline{q_2}(s,z,0)=a\,\overline{q_1}(s,z), \quad (18)$$

$$\overline{q_3}(s,0,y)=\mu_0\int_y^{\infty}\overline{q_2}(s,z,y)dz+\mu_0\int_0^{\infty}dv\int_y^{\infty}\overline{q_4}(s,z,v,y)dz, \tag{19}$$

$$\overline{q_4}(s,z,y,0)=\alpha\overline{q_3}(s,z,y). \tag{20}$$

Системе (14–20) удовлетворяет решение:

$$\overline{q_1}(s,z)=\frac{2\alpha\overline{p_0}(s)}{\alpha+\mu_1}(ae^{-(l+a)z}+\mu_1e^{-(s+\mu_0)z}),$$

$$\overline{q_2}(s,z,x)=\frac{2\alpha^2\overline{p_0}(s)}{\alpha+\mu_1}(ae^{-(\lambda+\alpha)z}e^{\alpha x}+\mu_1e^{-(s+\mu_0)z}e^{-\mu_1x}),\quad 0\le x\le z$$

$$\overline{q_3}(s,z,y)=\frac{2\alpha\lambda m_0\overline{p_0}(s)}{(\alpha+\mu_1)(\lambda(\lambda+\mu_0)+sa)}e^{-\lambda y}(a\,e^{-(\lambda+\alpha)z}+\mu_1e^{-(s+\mu_0)z})$$

$$\overline{q_4}(s,z,y,x)=\frac{2\alpha^3\lambda\mu_0\overline{p_0}(s)}{(\alpha+\mu_1)(\lambda(s+\mu_0)+sa)}e^{-\lambda y}(\alpha e^{-(\lambda+\alpha)z}e^{\alpha x}+$$

$$+\mu_1e^{-(s+\mu_0)z}e^{-\mu_1x}),\quad 0\le x\le z$$

При $0\le z\le x$ $\quad \overline{q}_2(s,z,x)=0$, $\quad \overline{q}_4(s,z,x,y)=0$.

Используя соотношения (1–4), предварительно подвергая их преобразованию Лапласа, а так же (13), получим:

$$\overline{p_1}(s)=\frac{2\alpha\lambda\overline{p_0}(s)}{(\lambda+\alpha)(s+\mu_0)},\qquad \overline{p_3}(s)=\frac{2\alpha^2\lambda m_0\overline{p_0}(s)}{(\lambda+\alpha)(s+\mu_0)(\lambda(\lambda+\mu_0)+sa)},$$

$$\overline{p_2}(s)=\frac{2\alpha^2\overline{p_1}(s)}{(\lambda+\alpha)(s+\mu_0)},\qquad \overline{p_4}(s)=\frac{2\alpha^3m_0\overline{p_1}(s)}{(\lambda+\alpha)(s+\mu_0)(\lambda(\lambda+\mu_0)+s\alpha)},$$

$$\overline{p_0}(s)=\frac{\lambda(s+\mu_0)+s\alpha}{s((\lambda+\alpha)(s+2\alpha)+\lambda\mu_0)}.$$

Поскольку $\sum_{i=0}^{4}p_i(t)=1$, то преобразование Лапласа этой суммы должно быть равным $1/s$, что и подтверждается непосредственной проверкой.

Далее получим стационарные вероятности состояний системы:

$$p_k=\lim_{t\to+\infty}p_k(t)=\lim_{s\to0}s\overline{p_k}(s).$$

$$p_0=\frac{\mu_0(\mu_0+\mu_1)}{\mu_0(\mu_0+\mu_1)+2\alpha(\mu_0+\mu_1+\alpha)},$$

$$p_1=\frac{2\alpha(\mu_0+\mu_1)^2}{(\mu_0+\mu_1+\alpha)(\mu_0(\mu_0+\mu_1)+2\alpha(\mu_0+\mu_1+\alpha))},$$

$$p_2 = p_3 = \frac{2\alpha^2(\mu_0 + \mu_1)}{(\mu_0 + \mu_1 + \alpha)(\mu_0(\mu_0 + \mu_1) + 2\alpha(\mu_0 + \mu_1 + \alpha))},$$

$$p_4 = \frac{2\alpha^3}{(\mu_0 + \mu_1 + \alpha)(\mu_0(\mu_0 + \mu_1) + 2\alpha(\mu_0 + \mu_1 + \alpha))}.$$

Коэффициент готовности K и средняя наработка между отказами T выражаются через стационарные вероятности (см. [2]):

$$K = p_0 + p_1 + p_3, \qquad T = \frac{K}{\Lambda},$$

где Λ – интенсивность потока отказов рассматриваемой системы.

$$\Lambda = \sum_{i,j} p_i\, l_{ij}, \quad i \in \{0,1,3\},\ j \in \{2,4\}.$$

l_{ij} – интенсивность перехода из состояния i в состояние j, определяемая из соотношения:

$$P\{x(t+h) = j / x(t) = i\} = l_{ij}h + o(h).$$

В изучаемой системе: $l_{02} = 0,\quad l_{04} = 0,\quad l_{12} = l_{34} = a\,,\quad l_{14} = 0,$ тогда $\Lambda = a\,(p_1 + p_3)$. Подставляя соответствующие значения p_i, получим:

$$K = \frac{(m_0 + m_1)(2a + m_0)}{m_0(m_0 + m_1) + 2a\,(m_0 + m_1 + a)} \quad , \quad T = \frac{2a + m_0}{2a^2}.$$

Независимость средней наработки между отказами от квалификации стажера объясняется тем, что по правилам обслуживания стажер принимает участие в обслуживании в моменты, когда система находится в неработоспособном состоянии.

Список использованной литературы

1. Беляев Ю. К. Линейчатые марковские процессы и их приложения к задачам теории надёжности // Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике. – Вильнюс. 1962. – С.309–323.
2. Вопросы математической теории надёжности // Под ред. Гнеденко Б.В. –М.: Радио и связь, 1983. – 376 с.
3. Коваленко А. И. Стрыгина Н. З. Вычисления стационарных характеристик надёжности четырёхэлементной иерархической системы с восстановлением // Автоматика и телемеханика. – М: Российская АН, 1992.–№1– С.156–164.
4. Коваленко А. И. Анализ надёжности трёхэлементной системы с восстановлением // Динам. системы. –1999. –Вып. 15. – С. 177–182.

Поступила в редколлегию 14.09.2000