УДК 519.8

Е.М. КИСЕЛЕВА, докт. физ.-мат. наук, Днепропетр. гос. ун-т
Н.К. ВАСИЛЬЕВА, канд. физ.-мат. наук, Днепропетр. гос. ун-т

ОЦЕНКИ РАЗРЫВА ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ

Для непрерывной многопродуктовой задачи оптимального разбиения множества n-мерного евклидового пространства на подмножества с неизвестными координатами центров при ограничениях в форме равенств и неравенств построены 4 оценки разрыва двойственности.

Большой класс практических задач, возникающих в области экономики, техники, физики и химии, сводится в математической постановке к непрерывным задачам оптимального разбиения множеств на подмножества с неизвестными координатами центров этих подмножеств. В работе [1] предложен метод решения задач разбиения, основывающийся на сведении исходных бесконечномерных задач через функционал Лагранжа к конечномерным двойственным задачам. Часть искомых переменных являются решениями двойственных задач. Остальные искомые переменные выражаются в явном виде. В общем случае задачи разбиения не относятся к задачам выпуклого программирования, поэтому возможен разрыв двойственности [2]. При этом оптимальное значение двойственной задачи является лишь нижней гранью для оптимального значения прямой задачи. Построению оценок разрыва двойственности и посвящена настоящая работа, в которой продолжены исследования, начатые в [3].

Перейдем к математической постановке непрерывной многопродуктовой задачи оптимального разбиения множества на подмножества с неизвестными координатами центров при ограничениях в форме равенств и неравенств.

Пусть Ω– ограниченное измеримое по Лебегу множество n–мерного евклидова пространства E_n. Измеримые по Лебегу подмножества $\Omega_1^j,...,\Omega_N^j$ составляют разбиение множества Ω, если $mes(\Omega_i^j \cap \Omega_k^j) = 0, \quad i \neq k, \; i,k = \overline{1,N}, \quad \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i^j = \Omega, \; j = \overline{1,M}$, где $mes(\cdot)$ – мера Лебега. Обозначим через t_i общий центр подмножеств $\Omega_i^1, \; ..., \Omega_i^M, \; i = \overline{1,N}$. Подмножества Ω_i^j однозначно определяются своими характеристическими функциями

$$l_i^j(x) = \begin{cases} 1, \text{если } x \in \Omega_i^j, \\ 0, \text{если } x \notin \Omega_i^j, \end{cases}$$

для почти всех (п.в.) $x \in \Omega,\ i = \overline{1, N},\ j = \overline{1, M}$.

Все возможные разбиения множества Ω на N подмножеств по каждому из M продуктов описываются вектор-функциями $l(\cdot) = (l_1^1(\cdot), l_2^1(\cdot), ..., l_N^1(\cdot), l_1^2(\cdot), ..., l_N^2(\cdot), ..., l_1^M(\cdot), ..., l_N^M(\cdot))$ из множества

$$\Lambda = \{ l(\cdot) \in (L_2(\Omega))^{M \times N} : \sum_{i=1}^{N} l_i^j(x) = 1,\ l_i^j(x) = 0 \vee 1$$

$$\text{для п.в. } x \in \Omega,\ i = \overline{1, N},\ j = \overline{1, M} \}.$$

Требуется найти такие вектор-функцию $l(\cdot)$ и вектор координат центров подмножеств $t = (t_1, ..., t_N)$, что

$$l(\cdot) \in \Lambda, \tag{1}$$

$$\tau \in T = \{ \tau \in (E_n)^N : \tau_i \in T_i,\ i = \overline{1, N} \}, \tag{2}$$

$$G_i(l(\cdot)) = \int_\Omega \sum_{j=1}^{M} r^j(x)\, l_i^j(x) dx - b_i = 0,\ i = \overline{1, p}, \tag{3}$$

$$G_i(l(\cdot)) = \int_\Omega \sum_{j=1}^{M} r^j(x)\, l_i^j(x) dx - b_i \le 0,\ i = \overline{p+1, N}, \tag{4}$$

и при этом функционал

$$I(l(\cdot), t) = \int_\Omega \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} c^j(x, t_i)\, r^j(x)\, l_i^j(x) dx \tag{5}$$

достигал бы минимального значения.

Здесь T_i – выпуклые замкнутые ограниченные множества из E_n, $i = \overline{1, N}$. Интегралы понимаются в смысле Лебега, $p < N$. Функции $r^j(x)$ – действительные, ограниченные, измеримые для п.в. $x \in \Omega$, $j = \overline{1, M}$. Функции $c^j(x, t_i)$ – действительные, измеримые по x, непрерывные по (x, t_i) для п.в. $(x, t_i) \in \Omega \times T_i$, $j = \overline{1, M}$, $i = \overline{1, N}$. Заданные числа b_i удовлетворяют неравенствам

$$0 < b_i \le \int_\Omega \sum_{j=1}^{M} r^j(x) dx,\ i = \overline{1, N},\quad \sum_{i=1}^{p} b_i < \int_\Omega \sum_{j=1}^{M} r^j(x) dx,\ \sum_{i=1}^{N} b_i > \int_\Omega \sum_{j=1}^{M} r^j(x) dx..$$

Перейдем от условия (1) к следующему ограничению:

$$l(\cdot) \in \Gamma = \{ l(\cdot) \in (L_2(\Omega))^{M \times N} : \sum_{i=1}^{N} l_i^j(x) = 1,\ 0 \le l_i^j(x) \le 1$$

$$\text{для п.в. } x \in \Omega,\ i = \overline{1, N},\ j = \overline{1, M} \}. \tag{6}$$

В работе [1] установлено, что множество оптимальных решений задачи (2)–(6) включает все оптимальные решения задачи (1)–(5). Поэтому перейдем к исследованию задачи (2)–(6).

Построим функционал Лагранжа

$$L(\{l(\cdot),t\},y) = I(l(\cdot),t) + \sum_{i=1}^{N} y_i G_i(l(\cdot)),$$

где $l(\cdot)\in \Gamma, t\in T, y = (y_1,...,y_N)\in \Psi = \{y \in (E_1)^N : y_i \ge 0, i = \overline{p+1,N}\}$.

С помощью функционала Лагранжа переформулируем задачу (2)–(6) следующим образом:

$$\text{минимизировать на } \Gamma\times T \ \sup_{\psi\in\Psi} L(\{l(\cdot),t\},y). \tag{7}$$

Двойственная задача к прямой задаче (7) имеет вид

$$\text{максимизировать на } \Psi \ \inf_{(\lambda(\cdot),\tau,)\in\Gamma\times T} L(\{l(\cdot),t\},y). \tag{8}$$

Обозначим через u и $\bar{u}$ оптимальные значения прямой и двойственной задач, то есть

$$u = \min_{(l(\cdot),t)\in\Gamma\times T} \sup_{y\in\Psi} L(\{l(\cdot),t\},y),\ \bar{u} = \max_{y\in\Psi} \min_{(l(\cdot),t)\in\Gamma\times T} L(\{l(\cdot),t\},y),$$

где переход от inf и sup к max и min допустим благодаря существованию решений задач (7) и (8).

При построении оценок разрыва двойственности для задач (7) и (8) в приведенных ниже теоремах 1 и 2 значения u и $\bar{u}$ оцениваются с помощью решений более простых непрерывных задач оптимального разбиения, а именно: N задач по размещению одного центра на Ω; задачи разбиения без ограничений (3) и (4); задачи разбиения множества на подмножества с заданными координатами центров.

Пусть

$$\Gamma_1 = \{l(\cdot)\in\Gamma : G_i(l(\cdot)) = 0,\ i = \overline{1,p},\ G_i(l(\cdot)) \le 0,\ i = \overline{p+1,N}\}.$$

Теорема 1. *Для оптимальных значений задач (7) и (8) справедливо неравенство*

$$u - \bar{u} \le \min_{(d_1,\mathbf{K},d_N)\in D_1} \sum_{i=1}^{N} \frac{d_i}{\sum_{k=1}^{M}\int_\Omega r^k(x)dx} \min_{t_i\in T_i} \sum_{j=1}^{M}\int_\Omega r^j(x) c^j(x,t_i)dx -$$

$$- \min_{t\in T} \sum_{j=1}^{M} \int_\Omega r^j(x) \min_{i=\overline{1,N}} c^j(x,t_i)dx, \tag{9}$$

где $D_1 = \{(d_1,...,d_N)\in (E_1)^N : d_i = b_i,\ i=\overline{1,p},\ 0\le d_i \le b_i,\ i = \overline{p+1,N},$

$$\sum_{i=1}^{N} d_i = \sum_{j=1}^{M}\int_\Omega r^j(x)dx\}.$$

Доказательство. Действительно,

$$u=\min_{(l(\cdot),t)\in\Gamma_1\times T}\Big[\sum_{j=1}^{M}\int_{\Omega} r^j(x)\sum_{i=1}^{N}c^j(x,t_i)l_i^j(x)dx\Big]=$$
$$=\min_{l(\cdot)\in\Gamma_1}\sum_{i=1}^{N}\min_{t_i\in T_i}\sum_{j=1}^{M}\int_{\Omega} r^j(x)c^j(x,t_i)l_i^j(x)dx\le$$
$$\le\min_{(d_1,\mathbf{K},d_N)\in D_1}\sum_{i=1}^{N}\frac{d_i}{\sum_{k=1}^{M}\int_{\Omega} r^k(x)dx}\min_{t_i\in T_i}\sum_{j=1}^{M}\int_{\Omega} r^j(x)c^j(x,t_i)dx,$$

где последнее неравенство имеет место ввиду того, что для любого набора $(d_1,\ldots,\ d_N)\in D_1$ множеству Γ_1 принадлежит вектор-функция вида

$$l_i^j(x)=\frac{d_i}{\sum_{k=1}^{M}\int_{\Omega} r^k(x)dx}\quad \text{для п.в. } x\in\Omega,\ i=\overline{1,N},\ j=\overline{1,M}.$$

Кроме того,

$$\bar{u}=\max_{y\in\Psi}\min_{(l(\cdot),t)\in\Gamma\times T}L(\{l(\cdot),t\},y)\ge\min_{(l(\cdot),t)\in\Gamma\times T}L(\{l(\cdot),t\},(0,\ldots,0))=$$
$$=\min_{(l(\cdot),t)\in\Gamma\times T}\Big[\sum_{j=1}^{M}\int_{\Omega} r^j(x)\sum_{i=1}^{N}c^j(x,t_i)l_i^j(x)dx\Big]=$$
$$=\min_{t\in T}\Big[\sum_{j=1}^{M}\int_{\Omega} r^j(x)\min_{i=\overline{1,N}}c^j(x,t_i)dx\Big].$$

Отсюда получаем неравенство (9). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Для оптимальных значений задач (7) и (8) справедливо неравенство*

$$u-\bar{u}\le\min_{l(\cdot)\in\Gamma_1}\Big[\sum_{j=1}^{M}\int_{\Omega} r^j(x)\sum_{i=1}^{N}\max_{t_i\in T_i}c^j(x,t_i)l_i^j(x)dx\Big]-$$
$$-\sum_{j=1}^{M}\int_{\Omega} r^j(x)\min_{i=\overline{1,N}}\min_{t_i\in T_i}c^j(x,t_i)dx.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Отметим, что неравенства из формулировок теорем 1 и 2 позволяют оценивать не только разрывы двойственности, но и априорно оценивать оптимальные значения прямой и двойственной задач.

При построении оценок разрыва двойственности для задач (7) и (8) в приведенных ниже теоремах 3 и 4 учитывалось, что допустимым решением задачи (7) может быть лишь пара $(l(\cdot),t)\in\Gamma\times T$, удовлетворяющая ограничениям (3) и (4).

Пусть $l_*(\cdot)\in \Gamma$. Обозначим

$$I_1=\{i\in\{1,...,p\}: G_i(l_*(\cdot))>0\},$$
$$I_2=\{i\in\{1,...,p\}: G_i(l_*(\cdot))<0\},$$
$$I_3=\{i\in\{1,...,p\}: G_i(l_*(\cdot))=0\},$$
$$I_4=\{i\in\{p+1,...,N\}: G_i(l_*(\cdot))>0\},$$
$$I_5=\{i\in\{p+1,...,N\}: G_i(l_*(\cdot))\le 0\},$$

$$D_2=\{(d_{p+1},...,d_N)\in (E_1)^{N-p} : \text{для } i\in I_4\ G_i(l_*(\cdot))\le d_i\le G_i(l_*(\cdot))+b_i,$$
$$\text{для } i\in I_5\ 0\le d_i\le -G_i(l_*(\cdot)), \sum_{i=p+1}^{N} d_i=\int_\Omega \sum_{j=1}^{M} r^j(x)dx-\sum_{i=1}^{p} b_i\},$$

$$\Gamma_2=\{l(\cdot)\in \Gamma_1:\ l_i^j(x)=l_{*i}^{\ j}(x), \text{ если } l_{*i}^{\ j}(x)>0, \text{ при } i\in I_2\cup I_5,$$
$$l_i^j(x)=l_{*i}^{\ j}(x) \text{ при } i\in I_3,\ l_i^j(x)=0, \text{ если } l_{*i}^{\ j}(x)=0, \text{ и}$$
$$l_i^j(x)=0\vee l_{*i}^{\ j}(x), \text{ если } l_{*i}^{\ j}(x)>0, \text{ при } i\in I_1\cup I_4 \text{ для п.в. } x\in\Omega,\ j=\overline{1,M}\}.$$

Теорема 3. *Пусть* y^* *– оптимальное решение двойственной задачи* (8), $(l_*(\cdot),t_*)\in \Gamma\times T$, $\min\limits_{(l(\cdot),t)\in\Gamma\times T} L(\{l(\cdot),t\},y^*)=L(\{l_*(\cdot),t_*\},y^*)$. *Тогда оптимальные значения задач* (7) *и* (8) *связаны неравенством*

$$u-\bar{u}\le -\sum_{i=1}^{N} y_i^* G_i(l_*(\cdot))-\sum_{i\in I_1} G_i(l_*(\cdot)) \operatorname*{vrai\,inf}_{\substack{x\in\Omega:\\ l_{*i}^{\ j}(x)>0,\ j\in\{1,...,M\}}} c^j(x,t_{*i})-$$
$$-\sum_{i\in I_2} G_i(l_*(\cdot)) \operatorname*{vrai\,sup}_{\substack{x\in\Omega,\\ j=\overline{1,M}}} c^j(x,t_{*i})+\min_{(d_{p+1},\ldots,d_N)\in D_2}[\sum_{i\in I_5} d_i \operatorname*{vrai\,inf}_{\substack{x\in\Omega,\\ j=\overline{1,M}}} c^j(x,t_{*i}) -$$
$$-\sum_{i\in I_4} d_i \operatorname*{vrai\,inf}_{\substack{x\in\Omega:\\ l_{*i}^{\ j}(x)>0,\ j\in\{1,...,M\}}} c^j(x,t_{*i})]. \qquad (10)$$

Доказательство. Действительно,

$$u=\min_{(l(\cdot),t)\in\Gamma_1\times T}[\sum_{j=1}^{M}\int_\Omega r^j(x)\sum_{i=1}^{N} c^j(x,t_i)l_i^j(x)dx]\le$$
$$\le \min_{l(\cdot)\in\Gamma_2}\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega\sum_{j=1}^{M} r^j(x)c^j(x,t_{*i})l_i^j(x)dx\le$$

$$\le \sum_{i\in I_1}[\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{M} r^j(x)c^j(x,t_{*i})l_{*i}^j(x)dx - G_i(l_*(\cdot)) \underset{\substack{x\in\Omega:\\ l_{*i}^j(x)>0,\, j\in\{1,\dots,M\}}}{vrai\inf} c^j(x,t_{*i})]+$$

$$+\sum_{i\in I_2}[\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{M} r^j(x)c^j(x,t_{*i})l_{*i}^j(x)dx - G_i(l_*(\cdot)) \underset{\substack{x\in\Omega,\\ j=\overline{1,M}}}{vrai\sup} c^j(x,t_{*i})]+$$

$$+\sum_{i\in I_3}[\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{M} r^j(x)c^j(x,t_{*i})l_{*i}^j(x)dx]+\sum_{i\in I_4\cup I_5}[\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{M} r^j(x)c^j(x,t_{*i})l_{*i}^j(x)dx]+$$

$$+\min_{(d_{p+1},\mathbf{K},d_N)\in D_2}[\sum_{i\in I_5} d_i \underset{\substack{x\in\Omega,\\ j=\overline{1,M}}}{vrai\sup} c^j(x,t_{*i}) - \sum_{i\in I_4} d_i \underset{\substack{x\in\Omega:\, l_{*i}^j(\cdot)>0,\\ j\in\{1,\dots,M\}}}{vrai\inf} c^j(x,t_{*i})]=$$

$$=\bar{u}-\sum_{i=1}^{N} y_i^* G_i(l_*(\cdot)) - \sum_{i\in I_1} G_i(l_*(\cdot)) \underset{\substack{x\in\Omega;\\ l_{*i}^j(x)>0,\, j\in\{1,\dots,M\}}}{vrai\inf} c^j(x,t_{*i})-$$

$$-\sum_{i\in I_2} G_i(l_*(\cdot)) \underset{\substack{x\in\Omega,\\ j=\overline{1,M}}}{vrai\sup} c^j(x,t_{*i})+$$

$$+\min_{(d_{p+1},\mathbf{K},d_N)\in D_2}[\sum_{i\in I_5} d_i \underset{\substack{x\in\Omega,\\ j=\overline{1,M}}}{vrai\sup} c^j(x,t_{*i}) - \sum_{i\in I_4} d_i \underset{\substack{x\in\Omega:\\ l_{*i}^j(\cdot)>0,\, j\in\{1,\dots,M\}}}{vrai\inf} c^j(x,t_{*i})].$$

Отсюда получаем неравенство (10). Теорема 3 доказана.

Отметим, что оценка разрыва двойственности из теоремы 3 является точной в том смысле, что при выполнении сильного соотношения двойственности $(u=\bar{u})$ она равна 0.

Теорема 4. *Пусть* $(l_*(\cdot),t_*)\in\Gamma\times T$ и $L(\{l_*(\cdot),t_*\},(0,\dots,0))= =\min_{(l(\cdot),t)\in\Gamma\times T} L(\{l(\cdot),t\},(0,\dots,0))$.*Тогда оптимальные значения задач (7) и (8) связаны неравенством*

$$u-\bar{u}\le -\sum_{i\in I_1} G_i(l_*(\cdot)) \underset{\substack{x\in\Omega;\\ l_{*i}^j(x)>0,\, j\in\{1,\dots,M\}}}{vrai\inf} c^j(x,t_{*i})-$$

$$-\sum_{i\in I_2} G_i(l_*(\cdot)) \underset{\substack{x\in\Omega,\\ j=\overline{1,M}}}{vrai\sup} c^j(x,t_{*i})+\min_{(d_{p+1},\mathbf{K},d_N)\in D_2}[\sum_{i\in I_5} d_i \underset{\substack{x\in\Omega,\\ j=\overline{1,M}}}{vrai\sup} c^j(x,t_{*i})-$$

$$-\sum_{i\in I_4} d_i \underset{\substack{x\in\Omega:\\ l_{*i}^j(\cdot)>0,\, j\in\{1,\dots,M\}}}{vrai\inf} c^j(x,t_{*i})].$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.

Список использованной литературы

1. Киселева Е.М. Математические методы и алгоритмы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств и их приложения: Автореф. дис. …д-ра физ.-мат. наук: 01.01.09/ Днепропетр. гос. ун-т. – Киев, 1991. – 33 с.
2. Васильева Н.К. Сильная двойственность для непрерывной модели оптимального разбиения множества // Вісник Дніпропетровського університету. Вип. 4. Фізика. Радіоелектроніка. – Дніпропетровськ: ДДУ. – 1998. – С. 149–154.
3. Kiseleva E., Vasiljeva N. On an estimate of duality gap in a continuous optimal set partitioning problem // Питання прикладної математики та математичного моделювання. – Дніпропетровськ: ДДУ. – 1999. – С. 59–62.

Поступила в редколлегию 29.03.2000