

10. Morse F. M., Feshbach H. Methods of theoretical physics. – New York, McGraw-Hill Inc. – 1953. – Vol. 1 and 2. – 930 and 880 pp.
11. Vissers F. P. L. M., Kamp L. P. J., Sluijter F. W. Some generalizations of radial Bremmers series // Wave Motion. – 1991. – 13, N1. – P. 43–51.
12. Селезов И. Т., Яковлев В. В. Дифракция волн на симметричных неоднородностях. – К.: Наук. думка, 1978. – 146 с.
13. Кратцер А., Франц Б. Трансцендентные функции. – М.: Издат. иностр. лит., 1963. – 468 с.
14. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: ГИФ МЛ, 1961. – 704 с.

Поступила в редколлегию 12.01.2000

УДК 532.5:551.466

Ю.Б.ИВАНОВ, канд.физ.-мат.наук, Таврический нац. ун-т

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЕРХИНЕРЦИОННЫХ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЧЕРНОГО МОРЯ В ПРИБЛИЖЕНИИ b - ПЛОСКОСТИ

Представлены новые результаты по численному моделированию сверх инерционных свободных колебаний Черного моря для переменного коэффициента Кориолиса.

В отличие от работы [1], в которой исследуются свободные колебания Черного моря в предположении постоянства коэффициента Кориолиса $f_0 = 2\Omega \sin j_0$, здесь будем считать его переменным, $f = f_0 + b$ у, где константа $b = 2/R_0\Omega \cos j_0$, R_0 – радиус Земли, Ω – угловая скорость вращения Земли, а ось $Y = 0$ декартовой системы координат расположена на географической широте $j_0 = 43^0$. Уравнения теории мелкой воды с переменным коэффициентом Кориолиса такого вида известны в литературе [2],[3] как приближение b - плоскости.

Получим уравнения колебаний свободной поверхности в приближении b - плоскости. Будем предполагать, что для искомой частоты свободных колебаний w выполняется условие $|f^2(y) - w^2| \geq C > 0$ для всех точек области G на плоскости XU . Тогда вывод дифференциальных уравнений и граничных условий, а также приведение их к безразмерному виду, проводятся аналогично случаю с постоянным коэффициентом Кориолиса [1]. В безразмерных переменных, при $a > 0$, имеем следующие уравнения:

$$I \left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial x_1}{D} \frac{\partial x_1}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial x_1}{D} \frac{\partial x_1}{\partial y} \right) + a \left(\frac{\partial}{\partial x} (1 + \text{'}by) \frac{H}{D} \frac{\partial x_2}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} (1 + \text{'}by) \frac{H}{D} \frac{\partial x_2}{\partial x} \right) +$$

$$+ I(I^2 - a^2) \mathbf{x}_1 = 0, \quad (1)$$

$$I \left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial x_2}{D} \frac{\partial x_2}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial x_2}{D} \frac{\partial x_2}{\partial y} \right) - a \left(\frac{\partial}{\partial x} (1 + \text{'}by) \frac{H}{D} \frac{\partial x_1}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} (1 + \text{'}by) \frac{H}{D} \frac{\partial x_1}{\partial x} \right) +$$

$$+ I(I^2 - a^2) \mathbf{x}_1 = 0,$$

с граничными условиями на Γ

$$\frac{H}{D} \left(a(1 + \text{'}by) \frac{\partial x_1}{\partial y} - I \frac{\partial x_2}{\partial x} \right) \mathbf{n}_x + \frac{H}{D} \left(a(1 + \text{'}by) \frac{\partial x_1}{\partial x} + I \frac{\partial x_2}{\partial y} \right) \mathbf{n}_y = 0 \quad (2)$$

$$\frac{H}{D} \left(a(1 + \text{'}by) \frac{\partial x_1}{\partial y} - I \frac{\partial x_2}{\partial x} \right) \mathbf{n}_x + \frac{H}{D} \left(a(1 + \text{'}by) \frac{\partial x_1}{\partial x} + I \frac{\partial x_2}{\partial y} \right) \mathbf{n}_y = 0$$

$$D(y) = 1 + \frac{1}{1 - c^2} \text{'}by(2 + \text{'}by), \quad c = \frac{I}{a}, \quad c \neq 1, \quad a > 0.$$

Уравнения и граничные условия содержат следующие безразмерные величины:

$$a = \frac{f_0 l_0}{\sqrt{gH_0}}, \quad I = \frac{wl_0}{\sqrt{gH_0}}, \quad \text{'}b = \frac{l_0}{R_0} \text{ctg} j_0, \quad \text{где } a \text{ безразмерный коэф-}$$

фициент Кориолиса, I – безразмерная искомая частота свободных колебаний, $\text{'}b$ – безразмерный бета-коэффициент.

Существенной особенностью краевой задачи (1) – (2) является то, что переменные коэффициенты в дифференциальных операторах определяются теперь не только глубиной $H(x, y)$, но и зависят от $c^2 = (I/a)^2$, то есть от искомой частоты I свободных колебаний. Как сами уравнения (1), так и граничные условия (2) справедливы только для тех I , для которых выполняется неравенство, следующее из условия

$$|f^2(y) - w^2| > 0,$$

$$c^2 = (I/a)^2 < (1 + \text{'}by)^2 \quad \text{для любой точки } (x, y) \in \bar{G}. \quad (3)$$

Будем предполагать, что коэффициент $H(x, y)$, определяющий форму дна, непрерывно дифференцируем. Тогда для любого фиксированного значения параметра c , удовлетворяющего неравенству (3),

коэффициенты $\frac{H(x, y)}{D(y; c^2)}$ и $(1 + \text{`b } y) \frac{H(x, y)}{D(y; c^2)}$, входящие в уравнения,

будут иметь непрерывные в области G производные.

Следуя работе [1] и считая c параметром, краевую задачу (1) – (2) рассматриваем как спектральную задачу в энергетическом пространстве $W_2^1(G)$ для самосопряженного операторного пучка, [4],

$$[I^3E - I(L(c^2) + a^2E) + aM(c^2)]x = 0. \quad (4)$$

Среди решений этого уравнения рассматриваем только те, которые удовлетворяют условию положительной ориентации, $(Mx, x) > 0$. В этом случае (для фиксированного значения c) нормальный спектр пучка (4) содержится в трех интервалах вещественной оси $(-\infty, -a)$, $(0, a)$, $(a, +\infty)$. В данной работе нас будут интересовать собственные значения I , принадлежащие интервалу $(0, a)$.

Методом Галеркина на конечномерном пространстве кусочно-линейных функций аппроксимируем уравнение (4) пучком матриц

$$[I^3B^{(N)} - I(L^{(N)}(c^2) + a^2B^{(N)}) + aM^{(N)}(c^2)]x = 0, \quad (5)$$

где $B^{(N)}$, $L^{(N)}(c^2)$, $M^{(N)}(c^2)$ – симметричные матрицы размерности

N , зависящие от параметра $c = \frac{l}{a}$.

Для вычисления собственных значений $I \in (0, a)$ уравнения (5), запишем его в эквивалентном виде

$$A^T(I; c^2)A(I; c^2)x = I^2x, \quad (6)$$

и дополним ограничениями

$$c = \frac{l}{a}, \quad c \leq 1 - d,$$

где $d = \text{`b } y_a$, $y_a = \max |y|$, $(x, y) \in \bar{G}$.

Для приближенного решения задачи (6) применим следующий итерационный алгоритм. Занумеруем решения $I_k \in (0, a)$ в порядке убывания их значений $a > I_1 \geq I_2 \geq \dots$. Пусть имеется процедура $\text{Pr } A1(\text{дано} : k, c, A(I; c); \text{результат} : I_k, x_k)$, которая по заданному номеру k , значению c и матрице $A(I; c)$ находит k -ое собственное значение I_k и соответствующий собственный вектор x_k уравнения (6). Далее:

- задаем номер k решения и начальное приближение $I := I_k^0$;
- вычисляем значение $c := \frac{l}{a}$; если $c > 1 - d$ то полагаем $c := 1 - d$;

- 1: Pr $Al(k, cA(I; c); I_k, x_k)$; (* нашли решение уравнения (6) *)
- если $|I - I_k| > \epsilon$ то

$$\{I := I_k; c = \frac{I}{a}; \text{если } c > 1 - d \text{ то } c := 1 - d; \text{переход наметку 1:}\}$$
- сохраняем решение I_k и x_k ;
- конец алгоритма.

Для изучения b - эффекта на длинные поверхностные волны Черного моря были проведены расчеты при следующих значениях параметров. Ось OX декартовой системы координат была перенесена на широту $j_0 = 43^0$. Безразмерный параметр $b = \frac{l_0}{R_0} ctg j_0 = 0.0536$ при $l_0 = 3 \cdot 10^5$ м, $R_0 = 6 \cdot 10^6$ м; $d = 0.04288$ и следовательно, должно выполняться неравенство $c \leq 0.957$. Вычислялись моды колебаний с периодами $T > T_1$, где $T_1 = \frac{2p}{f_0}$. Значение инерционного периода H мин. Значения периодов $T_k, k = 1, \dots, 8$ собственных колебаний оказались равными (в минутах):

T_k	1088.5	1088.7	1097.9	1114.9	1122.9	1147.2	1175.2	1206.8
c_k	0.967	0.967	0.959	0.944	0.938	0.918	0.896	0.872

Из приведенных значений c_k видно, что неравенство $c_k \leq 1 - d = 0.957$ приближенно выполняется для $k \geq 3$. Это означает, что свободные колебания с периодами $T_1 = 1088.5$ мин и $T_2 = 1088.7$ мин могут не существовать как приближенные решения спектральной задачи (1)–(2).

Для сравнения приведем таблицу периодов, вычисленных при $b = 0$:

T_k^0	1053.14	1062.3	1085.0	1111.2	1136.8	1153.47	1176.0	1208.4
---------	---------	--------	--------	--------	--------	---------	--------	--------

из которой следует, что влияние b - эффекта ослабевает с увеличением порядкового номера периода T_k .

На рис.1–4. Приведены линии уровней амплитуд для сверхинерционных волн с порядковыми номерами $k = 3$ и $k = 4$. Расчеты проведены при значениях $b = 0.0536$ и $b = 0$. Линия уровня C искалась

как решение уравнения $Am(x, y) = A_{\min} + C(A_{\max} - A_{\min})$ для значений C , указанных на рисунках, $0 < C < 1$, при этом амплитуда волны в точке (x, y) вычислялась по формуле $Am(x, y) = [x_1^2(x, y) + x_2^2(x, y)]^{1/2}$.

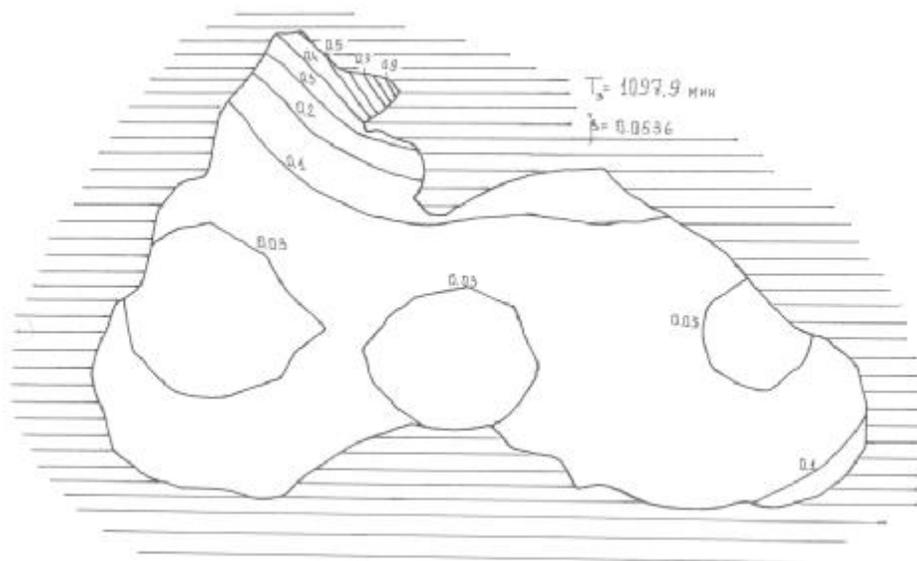


Рис.1. Линии уровней амплитуды сверхкритической волны с периодом $T_3 = 18.3ч$ в приближении b - плоскости

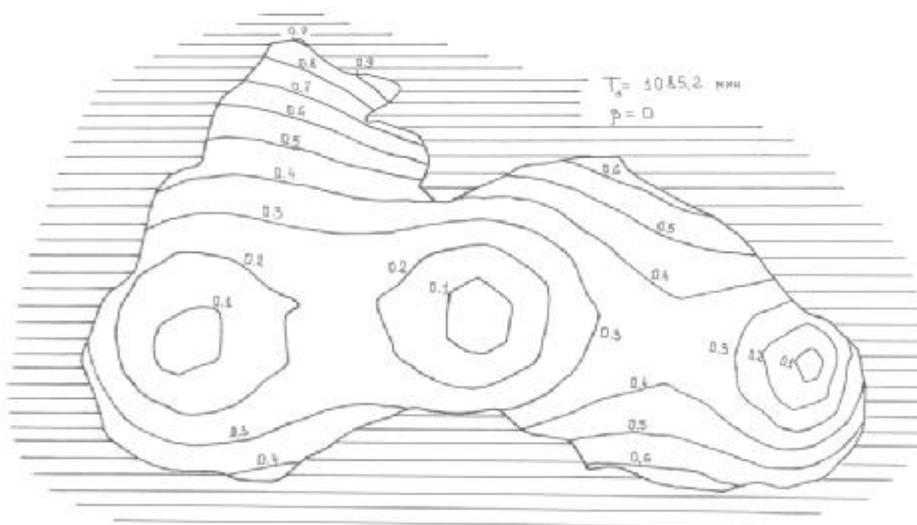


Рис.2. Линии уровней амплитуды сверхкритической волны с периодом $T_3 = 18.1ч$, вычисленной без учета b - эффекта

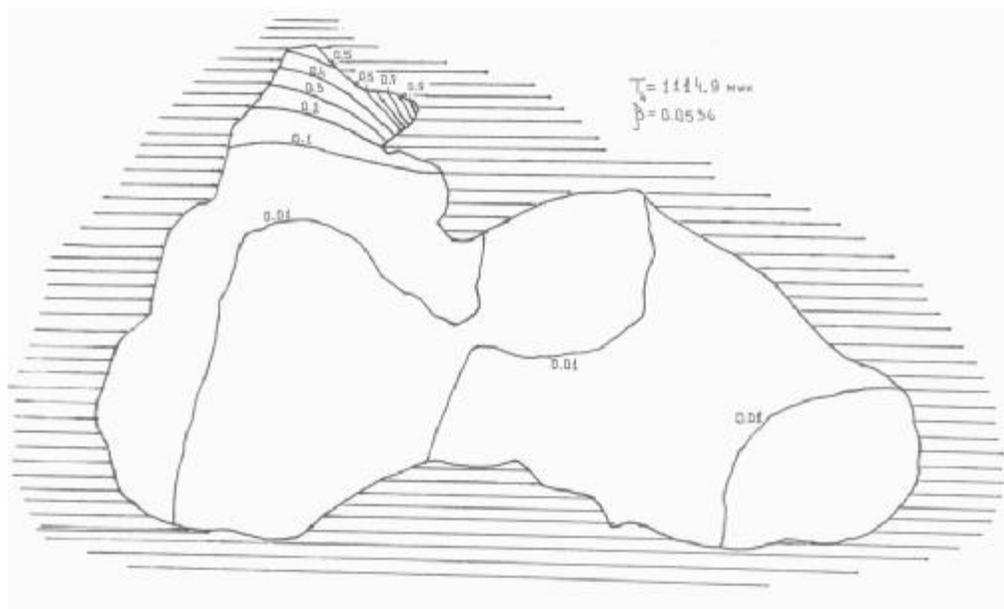


Рис.3. Линии уровней амплитуды сверхинерционной волны с периодом $T_4 = 18.6ч$ в приближении b - плоскости

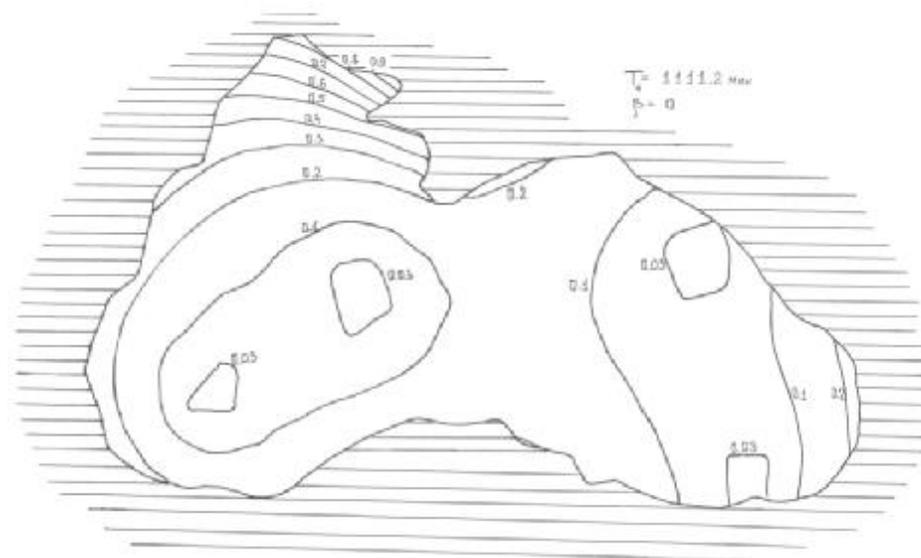


Рис.4. Линии уровней амплитуды сверхинерционной волны с периодом $T_4 = 18.5ч$, вычисленной без учета b - эффекта

Основные результаты, полученные при математическом моделировании сверхинерционных свободных колебаний Черного моря с учетом b - эффекта заключаются в следующем. Существуют свободные колебания Черного моря с периодами $T_k \geq 1098$ мин (18.3 ч).

Вблизи инерционного периода T_I в диапазоне 17.5 – 18.5 часов свободные колебания могут не существовать. Заметно влияние b - эффекта на распределение амплитуды волны: амплитуда локализуется и ее наибольшие значения достигаются вдоль северо-западного побережья Крымского полуострова. Приближения b и f - плоскости существенно отличаются для волн с наименьшими порядковыми номерами k . С возрастанием номера k это различие исчезает.

Список использованной литературы

1. Иванов Ю.Б. Моделирование баротропных сейш в Черном море. //Доп. НАН України. – 1999.– N7.– С. 117–120.
2. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. – М.:Мир,1981. – 430 с.
3. Черкесов Л.В., Иванов В.А., Хартиев С.Н. Введение в гидродинамику и теорию волн. – Санкт-Петербург: Гидрометеиздат,1992. – 264 с.
4. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. – М.:Наука, 1989. – 416 с.

Поступила в редколлегию 5.06.2000