

**Список использованной литературы**

1. Abramov V.S. A model of the fractal string // Физ. и техн. высок. давлений. – 1997.–Т.7, N 1.– С. 28–35.
2. Абрамов В.С., Абрамова О.П. Полевой подход на основе дробного исчисления к описанию динамики фрактальных сред // Современные проблемы механики сплошной среды: Труды III Междунар. конф., Ростов-на-Дону, 7–9 октября 1997 г. – Ростов-на-Дону, –1997.– Т.1. – С. 6–10.
3. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск, 1987.– 688 с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости.– М.: Наука, 1987.– 248 с.
5. Абрамов В.С., Абрамова О.П. Задача типа Коши для фрактальной струны // Теорет. и прикл. механика. Харьков, 1997.– Вып.27. – С.137–145.

Поступила в редколлегию 17.04.2000

УДК 539.3

А. С. ГОЛЬЦЕВ, канд. физ.-мат. наук, Донецкий гос. ун-т

**ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ  
ТЕРМОУПРУГОГО ИЗГИБА ОРТОТРОПНЫХ  
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК**

Методом двухмерного интегрального преобразования Фурье построено фундаментальное решение термоупругого изгиба для тонких пологих ортотропных цилиндрических оболочек. Предполагалось линейное распределение тепла по толщине оболочки и конвективный теплообмен с внешней средой по закону Ньютона. Представлены результаты численных исследований.

При моделировании различного рода сосредоточенных воздействий на механические системы широко используется аппарат обобщенных функций. Полученные фундаментальные решения, имея определенный механический смысл, могут также применяться в различных численных методах. Для изотропных пластин без теплообмена и для ортотропных пластин при симметричном теплообмене фундаментальные решения термоупругости представлены в монографии [1]. В работе [2] получены аналогичные решения для уравнений термоупругости в случае произвольного теплообмена. В данной статье методы фундаментальных решений, изложенные в монографии [3], применяются к уравнениям термоупругого изгиба тонких ортотропных цилиндрических оболочек.

Рассмотрим тонкую ортотропную цилиндрическую оболочку толщиной  $2h$ , находящуюся в тепловом контакте с внешней средой

нулевой температуры. Оси координат  $x_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) совместим с главными направлениями теплопроводности и упругости. Введем безразмерную шкалу делений, определенную с точностью до множителя  $h$ . Оси координат  $x_1$  и  $x_2$  направим вдоль образующей и направляющей цилиндрической оболочки, соответственно. Оболочка нагревается источниками тепла объемной плотности  $W_0(x_1, x_2, x_3)$ . Предположим, что распределение источников тепла по толщине оболочки является нечетной функцией относительно толщинной координаты  $x_3$ . Будем считать, что на боковых поверхностях оболочки ( $x_3 = \pm 1$ ) происходит конвективный теплообмен с внешней средой по закону Ньютона.

При построении фундаментальных решений уравнений статики тонкостенных элементов конструкций используют теорию пологих оболочек [3]. Принимая линейный закон распределения температуры по толщине оболочки и следуя работам [4, 5], запишем систему уравнений теплопроводности пологих ортотропных цилиндрических оболочек следующим образом:

$$\Delta_1 T_1 - m_1 T_1 - m_3 T_2 = 0; \quad \Delta_1 T_2 - 3(1 + m_1) T_2 - 3m_2 T_1 = -3W_2. \quad (1)$$

Здесь

$$\Delta_1 = I_1 \frac{\mathcal{I}^2}{\mathcal{I}x_1^2} + I_2 \frac{\mathcal{I}^2}{\mathcal{I}x_2^2}; \quad I_1 = \frac{I_{11}}{I_{33}}; \quad I_2 = \frac{I_{22}}{I_{33}}; \quad m_{1,2} = \frac{1}{2}(Bi^+ \pm Bi^-);$$

$$m_3 = m_2 - k; \quad W_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2I_{33}} \int_{-1}^1 x_3 W_0(x_1, x_2, x_3) dx_3;$$

$T_1, T_2$  – интегральные характеристики температуры, средняя температура и температурный момент;  $I_{11}, I_{22}, I_{33}$  – главные коэффициенты теплопроводности;  $k = 1/R$ , где  $R$  – радиус цилиндрической оболочки;  $Bi^\pm$  – критерий Био на поверхностях  $x_3 = \pm 1$ .

Разрешающая система уравнений термоупругого равновесия в перемещениях для тонких пологих ортотропных цилиндрических оболочек взята с учетом гипотез Кирхгофа-Лява. Она имеет следующий вид в безразмерной системе координат [6]:

$$B_1 \frac{\mathcal{I}^2 U_1}{\mathcal{I}x_1^2} + B_3 \frac{\mathcal{I}^2 U_1}{\mathcal{I}x_2^2} + B_4 \frac{\mathcal{I}^2 U_2}{\mathcal{I}x_1 \mathcal{I}x_2} + J_1 \frac{\mathcal{I} U_3}{\mathcal{I}x_1} = b_1 \frac{\mathcal{I} T_1}{\mathcal{I}x_1};$$

$$B_3 \frac{\mathcal{I}^2 U_2}{\mathcal{I}x_1^2} + B_2 \frac{\mathcal{I}^2 U_2}{\mathcal{I}x_2^2} + B_4 \frac{\mathcal{I}^2 U_1}{\mathcal{I}x_1 \mathcal{I}x_2} + J_2 \frac{\mathcal{I} U_3}{\mathcal{I}x_2} = b_2 \frac{\mathcal{I} T_1}{\mathcal{I}x_2}; \quad (2)$$

$$J_1 \frac{\mathcal{I} U_1}{\mathcal{I}x_1} + J_2 \frac{\mathcal{I} U_2}{\mathcal{I}x_2} + D_1 \frac{\mathcal{I}^4 U_3}{\mathcal{I}x_1^4} + D_3 \frac{\mathcal{I}^4 U_3}{\mathcal{I}x_1^2 \mathcal{I}x_2^2} + D_2 \frac{\mathcal{I}^4 U_3}{\mathcal{I}x_2^4} + D_4 U_3 =$$

$$= kb_2 T_1 - b_1^0 \frac{\mathcal{I}^2 T_2}{\mathcal{I} x_1^2} - b_2^0 \frac{\mathcal{I}^2 T_2}{\mathcal{I} x_2^2},$$

где

$$\begin{aligned} B_1 &= kB; & B_2 &= k^{-1}B; & B_3 &= 2G; & B_4 &= n_2 B_1 + B_3; \\ D_1 &= kD; & D_2 &= k^{-1}D; & D_3 &= 2(n_2 D_1 + 4G/3); & D_4 &= 3k^2 D_2; \\ D &= B/3; & B &= 2/(1 - n_1 n_2); & J_1 &= n_2 kB_1; & J_2 &= kB_2; \\ b_i &= 3b_i^0 = c_i B_i \quad (i=1,2); & c_1 &= a_1 + n_2 a_2; & c_2 &= n_1 a_1 + a_2; \\ G &= G_{12}/E; & E &= \sqrt{E_1 E_2}; & k &= \sqrt{E_1/E_2}; \end{aligned}$$

$U_i (i = \overline{1,3})$  – перемещения вдоль координатных осей  $x_i (i = \overline{1,3})$ ;  $E_1$ ,  $E_2$  и  $G_{12}$  – модули Юнга и модуль сдвига;  $n_1$ ,  $n_2$  и  $a_1$ ,  $a_2$  – коэффициенты Пуассона и температурные коэффициенты линейного расширения для главных направлений.

Фундаментальное решение термоупругого изгиба представляет собой частное решение систем (1), (2) с правой частью в виде дельта-функции Дирака в уравнениях теплопроводности.

$$W_2(x_1, x_2) = W_2^* d(x_1, x_2). \quad (3)$$

Здесь  $d(x_1, x_2)$  – дельта-функция Дирака;  $W_2^*$  – мощность интегрального источника тепла, источника температурного момента.

Искомое фундаментальное решение найдено методом двумерного интегрального преобразования Фурье. Применяя преобразование Фурье к системам дифференциальных уравнений (1), (2) с правой частью (3), найдем решение в пространстве трансформант. Решение задачи теплопроводности имеет следующий вид:

$$\tilde{T}_1 = -\frac{3m_3}{2\rho} W_2^* \frac{1}{\Delta_T}; \quad \tilde{T}_2 = \frac{3}{2\rho} W_2^* \frac{I_1 x_1^2 + I_2 x_2^2 + m_1}{\Delta_T}, \quad (4)$$

где

$$\Delta_T = (I_1 x_1^2 + I_2 x_2^2)^2 + (3 + 4m_1)(I_1 x_1^2 + I_2 x_2^2) + 3(m_1 + m_1^2 - m_2 m_3);$$

$x_1$ ,  $x_2$  – переменные в пространстве трансформант.

Решение уравнений термоупругости (2), с учетом выражений (4), представимо в виде

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1 &= \frac{i}{\Delta} \left\{ (c_{11} x_1^7 + c_{12} x_1^5 x_2^2 + c_{13} x_1^3 x_2^4 + c_{14} x_1 x_2^6 + c_{15} x_1^3 + c_{16} x_1 x_2^2) \tilde{T}_1 + \right. \\ &\quad \left. + (c_{17} x_1^5 + c_{18} x_1^3 x_2^2 + c_{19} x_1 x_2^4) \tilde{T}_2 \right\}; \\ \tilde{U}_2 &= \frac{i}{\Delta} \left\{ (c_{21} x_1^6 x_2 + c_{22} x_1^4 x_2^3 + c_{23} x_1^2 x_2^5 + c_{24} x_2^7 + c_{25} x_1^2 x_2 + c_{26} x_2^3) \tilde{T}_1 + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( c_{27} \mathbf{x}_1^4 \mathbf{x}_2 + c_{28} \mathbf{x}_1^2 \mathbf{x}_2^3 + c_{29} \mathbf{x}_2^5 \right) \tilde{T}_2 \}; \\
 \tilde{U}_3 = & \frac{1}{\Delta} \left\{ \left( c_{31} \mathbf{x}_1^4 + c_{32} \mathbf{x}_1^2 \mathbf{x}_2^2 + c_{33} \mathbf{x}_2^4 \right) \tilde{T}_1 + \right. \\
 & \left. + \left( c_{34} \mathbf{x}_1^6 + c_{35} \mathbf{x}_1^4 \mathbf{x}_2^2 + c_{36} \mathbf{x}_1^2 \mathbf{x}_2^4 + c_{37} \mathbf{x}_2^6 \right) \tilde{T}_2 \right\}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь

$$\Delta = d_1 \mathbf{x}_1^8 + d_2 \mathbf{x}_1^6 \mathbf{x}_2^2 + d_3 \mathbf{x}_1^4 \mathbf{x}_2^4 + d_4 \mathbf{x}_1^2 \mathbf{x}_2^6 + d_5 \mathbf{x}_2^8 + d_6 \mathbf{x}_1^4 + d_7 \mathbf{x}_1^2 \mathbf{x}_2^2 + d_8 \mathbf{x}_2^4;$$

$c_{ij}$ ,  $d_i$  – коэффициенты, зависящие от геометрических и термомеханических параметров оболочки. Например,

$$\begin{aligned}
 c_{32} = & b_1 (B_4 J_2 - B_2 J_1) + b_2 \left\{ B_4 J_1 - B_1 J_2 + k (B_1 B_2 + B_3^2 - B_4^2) \right\}; \\
 d_3 = & B_2 B_3 D_1 + B_1 B_3 D_2 + D_3 (B_1 B_2 + B_3^2 - B_4^2).
 \end{aligned}$$

Применим формулу обращения для двумерного преобразования Фурье к трансформантам перемещений (5). При этом используем методику обращения, разработанную при построении фундаментальных решений статики изотропных оболочек [7]. Эта методика основана на использовании интегрального представления специальной функции  $G_{n,n}(z)$ , которая по своим свойствам подобна функции Макдональда.

Полученное решение в полярной системе координат  $r, j$  имеет следующую структуру:

$$U_i(r, j) = \frac{W_2^*}{p^2} \sum_{n=0}^{\infty} e_{ni} f_{ni}(j) \int_0^{p/2} \frac{f_{ni}(q)}{p_1(q) l^2(q)} \sum_{m=1}^4 F_{mni}(r, q) Q_{mi}(q) dq \quad (i = \overline{1,3}). \tag{6}$$

Здесь

$$f_{n1}(j) = \cos(2n+1)j; \quad f_{n2}(j) = \sin(2n+1)j; \quad f_{n3}(j) = \cos 2nj;$$

$$F_{1n1}(r, q) = F_{1n2}(r, q) = -r \operatorname{Re} G_{n+1,n}(\sqrt{ie}(q)r);$$

$$F_{2n1}(r, q) = F_{2n2}(r, q) = \frac{r}{e^2(q)} \operatorname{Im} G_{n+1,n}(\sqrt{ie}(q)r);$$

$$F_{1n3}(r, q) = \operatorname{Re} G_{n,n}(\sqrt{ie}(q)r); \quad F_{2n3}(r, q) = \frac{-1}{e^2(q)} \operatorname{Im} G_{n,n}(\sqrt{ie}(q)r);$$

$$F_{3n1}(r, q) = F_{3n2}(r, q) = -r G_{n+1,n}(a_1(q)r); \quad F_{3n3}(r, q) = G_{n,n}(a_1(q)r);$$

$$F_{4n1}(r, q) = F_{4n2}(r, q) = -r G_{n+1,n}(a_2(q)r); \quad F_{4n3}(r, q) = G_{n,n}(a_2(q)r);$$

$$Q_{mi}(q) = \sum_{j=1}^3 A_{mj}(q) M_{ij}(q); \quad l(q) = I_1 \cos^2 q + I_2 \sin^2 q;$$

$$e^4(q) = p_2(q) / p_1(q); \quad p_2(q) = d_6 \cos^4 q + d_7 \cos^2 q \sin^2 q + d_8 \sin^4 q;$$

$$p_1(\mathbf{q}) = d_1 \cos^8 \mathbf{q} + d_2 \cos^6 \mathbf{q} \sin^2 \mathbf{q} + d_3 \cos^4 \mathbf{q} \sin^4 \mathbf{q} + \\ + d_4 \cos^2 \mathbf{q} \sin^6 \mathbf{q} + d_5 \sin^8 \mathbf{q}; \quad a_i(\mathbf{q}) = \sqrt{b_i / l(\mathbf{q})} \quad (i = 1, 2); \\ b_{1,2} = \left\{ 3 + 4m_1 \mathbf{m} \sqrt{(3 + 4m_1)^2 - 12(m_1 + m_1^2 - m_2 m_3)} \right\} / 2;$$

$e_{ni}$  – числовые константы;  $A_{mj}(\mathbf{q})$  – рациональные выражения от переменных  $a_i^2(\mathbf{q})$ ,  $e^4(\mathbf{q})$ ;  $M_{ij}(\mathbf{q})$  – однородные тригонометрические полиномы от  $\sin \mathbf{q}$  и  $\cos \mathbf{q}$ , коэффициенты которых зависят от геометрических и термомеханических параметров оболочки. Например,

$$A_{23}(\mathbf{q}) = \frac{a_1^2(\mathbf{q})a_2^2(\mathbf{q}) - e^4(\mathbf{q})}{\{a_1^4(\mathbf{q}) + e^4(\mathbf{q})\}\{a_2^4(\mathbf{q}) + e^4(\mathbf{q})\}}; \\ M_{12}(\mathbf{q}) = 3m_1 \{c_{17} \cos^5 \mathbf{q} + c_{18} \cos^3 \mathbf{q} \sin^2 \mathbf{q} + c_{19} \cos \mathbf{q} \sin^4 \mathbf{q}\};$$

Радиальная координата  $r$  в соотношении (6) входит лишь в составляющую решения  $F_{mni}(r, \mathbf{q})$ , которая выражается через специальную функцию  $G_{n,m}(z)$ . Учитывая ее асимптотические свойства при  $|z| \rightarrow 0$  [7], получим асимптотическое поведение перемещений в окрестности сосредоточенного "изгибного" источника тепла.

$$U_i(r, j) \approx C_i(j) r \ln r \quad (i = 1, 2); \quad U_3(r, j) \approx C_3(j). \quad (7)$$

Здесь  $C_i(j)$  – функции координаты  $j$ , не имеющие особенностей. Прогиб в выражении (7) имеет асимптотику  $r^0$ . В точке расположения интегрального источника тепла он определяется для каждого конкретного случая, в то время как для пластин ( $k = 0$ ) прогиб определяется с точностью до произвольной постоянной  $C$ .

Численные исследования проведены для стеклопластика косоугольной намотки со следующими значениями термоупругих параметров [8]:  $k = 1,935$ ;  $G = 0,2067$ ;  $n_1 = 0,2798$ ;  $a_1 = 0,7 \cdot 10^{-5} K^{-1}$ ;  $a_2 = 3,8 \cdot 10^{-5} K^{-1}$ ;  $I_1 = 2,306$ ;  $I_2 = 1$ , считалось, что  $I_{22} = I_{33}$ . Исследовалась зависимость прогиба  $U_3$  и радиального перемещения  $U_r$  ( $U_1$  вдоль оси  $x_1$  или  $U_2$  вдоль оси  $x_2$ ) от радиальной координаты  $r$  при действии источника температурного момента единичной мощности

( $W_2^* = 1^0 K$ ). На боковых поверхностях оболочки предполагался симметричный теплообмен ( $Bi^+ = Bi^- = 0,1$ ) с окружающей средой.

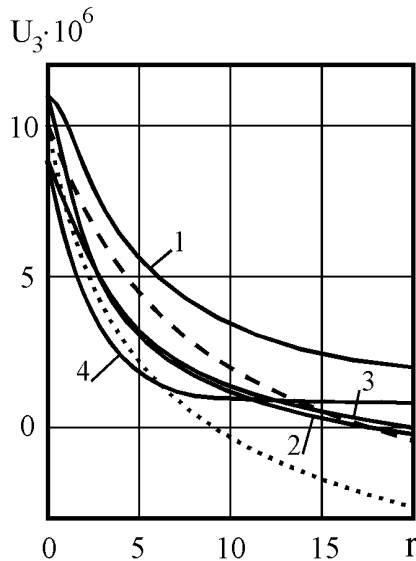


Рис. 1

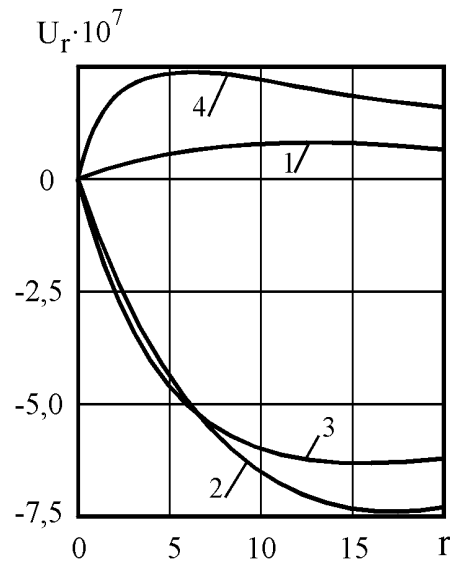


Рис. 2

Результаты расчетов представлены на рис. 1, 2, где значения перемещений и радиальной координаты даны с точностью до  $h$ . Сплошными линиями показаны графики для цилиндрической оболочки ( $k = 0,025$ ), штриховой и пунктирной – для пластины ( $k = 0$ ). При этом значение произвольной постоянной  $C$  для прогиба пластины принималось равным 10. Цифрами 1,2 и 3,4 обозначены графики для цилиндрической оболочки с образующей вдоль оси  $x_1$  и  $x_2$ , соответственно. Зависимости для перемещений вдоль координатной оси  $x_1$  ( $j = 0$ ) отмечены цифрами 1, 3 и штриховой линией для пластины. Зависимости для перемещений вдоль координатной оси  $x_2$  ( $j = p / 2$ ) отмечены цифрами 2, 4 и пунктирной линией для пластины. Графики для пластины показаны лишь на рис. 1, поскольку радиальные перемещения в пластине под действием "изгибного" источника тепла при симметричном теплообмене отсутствуют [2].

Из рисунков следует, что фундаментальное решение термоупругого изгиба ортотропных цилиндрических оболочек существенно зависит от ориентации главных осей ортотропии и кривизны оболочки. В отличие от пластины радиальные перемещения в цилиндрической оболочке под действием "изгибного" источника тепла не равны нулю. При этом их значения на порядок меньше прогибов оболочки.

**Список использованной литературы**

1. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – Киев: Наук. думка, 1972. – 308 с.
2. Гольцев А. С. Фундаментальное решение уравнений термоупругости для тонких ортотропных пластин в случае теплообмена // Труды междунар. науч. конф. "Современные проблемы концентрации напряжений". – Донецк: Донец. гос. ун-т, "Кассиопея", 1998. – С. 56–60.
3. Концентрация напряжений / Под ред. А. Н. Гузя, А. С. Космодамианского, В. П. Шевченко. – Киев: А.С.К., 1998. – 387 с. (Механика композитов: В 12 т. Т. 7)
4. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Обобщенная термомеханика. – Киев: Наук. думка, 1976. – 311 с.
5. Швец Р. Н., Лунь Е. И. Некоторые вопросы теории термоупругости ортотропных оболочек с учетом инерции вращения и поперечного сдвига // Прикл. механика. – 1971. – 7, №10. – С. 121–125.
6. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 448 с.
7. Хижняк В. К., Шевченко В. П. Смешанные задачи теории пластин и оболочек: Учебное пособие. – Донецк: ДонГУ, 1980. – 128 с.
8. Космодамианский А. С., Калоеров С. А. Температурные напряжения в многосвязных пластинках. – Киев; Донецк: Вища школа, 1983. – 160 с.

Поступила в редколлегию 03.02.2000