УДК 681.3

С.А.ДУБОВИК, канд. техн. наук, Севастоп. гос. техн. ун-т

ТОЖДЕСТВО КАЛМАНА В СИНТЕЗЕ МНОГОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Для задачи аналитического конструирования регулятора предлагается решение в виде алгоритма, не содержащего уравнений Риккати. В целом ряде случаев это приводит к существенным вычислительным упрощениям.

В статьях [1,2] показано, что для сингулярно возмущенных систем удается связать выбор весовой матрицы квадратического критерия с грубыми оценками качества оптимальной системы, а именно, с характеристическим полиномом вырожденной системы. Последний в [1,2] назван внешним полиномом возмущенной системы. Доказательство основного результата в [1,2] опирается на частотное тождество Калмана [3]. В настоящей статье тождество Калмана предлагается как конструктивное средство синтеза, причем не только в асимптотической постановке, но и в точной.

Рассмотрим линейную стационарную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu, \quad x(0) = x_0, \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{1}$$

в которой: $x-$ n-вектор состояния, $u-$ скалярное управление, $y-$ r-вектор выхода.

Относительно системы (1) предположим, что пара (A,b) – управляема. Качество системы (1) будем оценивать с помощью квадратического функционала следующего вида

$$r = \int_0^\infty \left[x^T(t) Q x(t) + 2u(t) N x(t) + u^2(t)\right] dt,$$

где весовая матрица Q есть симметричная неотрицательно определенная $Q = C^T C$, а N – матрица-строка размерности n. Относительно критерия r будем предполагать, что матрица $\tilde{Q} = Q - N^T N$ является неотрицательно определенной. Пусть еще матрица Z имеет такой же ранг, что и $\tilde{Q}$, удовлетворяет соотношению $\tilde{Q} = Z^T Z$ и пара (A,Z) – наблюдаема. Тогда функционал r определен и может быть использован для синтеза устойчивой замкнутой системы на основе решения уравнений Риккати. Цель настоящей статьи – показать, что при надлежащем выборе весовых матриц указанного квадратического критерия задача может быть решена значительно проще.

Для матрицы A зададим коэффициенты a_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, ее характеристического полинома

$$\det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0 .$$

В этих условиях существует невырожденное преобразовние L: $x = LX$, приводящее систему (1) к канонической форме:

$$\dot{X} = A_0 X + b_0 u, \quad y = C_0 X, \quad C_0 = CL, \quad b_0 = L^{-1} b, \tag{2}$$

причем $A_0 = J_0 - b_0 a$, $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})^T$, $b_0 = e_{nn}$,

$J_0 = (0, e_{n1}, \ldots, e_{n(n-1)})$, где $n-$вектор e_{nk} при $0 < k < n$ имеет на k-ом месте единицу, а остальные элементы – нули.

Предположим, что матрица выхода в канонической системе имеет вид $C_0 = (c_0, 0)$, $c_0 = diag(c_{00}, c_{01}, \ldots, c_{0(r-1)})$, то есть, имеет блок в виде диагональной $r \times r-$матрицы, а остальные элементы – нули. Управление в системе (2) будем выбирать в следующем виде $u(t) = U(t) + \Delta u(t)$, где $\Delta u(t) = a\, X(t) = a\, L^{-1}x(t)$. Подставляя это в (2), получим следующую задачу оптимизации по управлению U: для системы

$$\dot{X} = J_0\, X + b_0 U \tag{3}$$

найти управление, минимизирующее квадратический критерий

$$r_0 = \int_0^\infty \left[X^T(t) Q_0 X(t) + U^2(t)\right] dt, \tag{4}$$

где $Q_0 = C_0^T\, C_0$. Решение сформулированной задачи аналитического конструирования регулятора хорошо известно [3] и имеет линейную форму:

$$U(t) = D_0\, X(t). \tag{5}$$

В рассматриваемом случае канонической системы это решение будет получено, если будет указан способ построения характеристического полинома оптимальной системы (3)–(5), то есть системы с управлением, решающим задачу (3)–(5). Запишем для оптимальной системы передаточные функции в разомкнутом состоянии

$$W_0(s) = -D_0(Is - J_0)^{-1} b_0, \qquad W_{c0}(s) = -C_0(Is - J_0)^{-1} b_0 .$$

Матрицы здесь легко обращаются, в результате чего получим

$$W_0(s) = -s^{-n} R_0(s), \qquad R_0(s) = \sum_{i=0}^{n-1} d_{0i} s^i,$$

$$W_{c0}(s) = -s^{-n} \begin{pmatrix} c_{00} \\ c_{01} s \\ \vdots \\ c_{0(r-1)} s^{r-1} \end{pmatrix},$$

где коэффициенты d_{0i} – элементы строки D_0, а c_{0i} – элементы, стоящие на диагонали блока c_0.

Для передаточной функции замкнутой системы $\Phi(s)$ будем иметь

$$\Phi_0(-s)\Phi_0(s) = \frac{W_0(-s)}{1+W_0(-s)} \cdot \frac{W_0(s)}{1+W_0(s)},$$

или, в соответствии с тождеством Калмана и структурой матриц в каноническом базисе,

$$\Phi_0(-s)\Phi_0(s) = \frac{W_0(-s)W_0(s)}{1+W_{c0}^T(-s)W_{c0}(s)} = \frac{(-1)^n R_0(-s)R_0(s)}{s^{2n}+(-1)^n R_{c0}(-s)R_{c0}(s)},$$

где обозначено $R_{c0}(s) = \sum_{i=0}^{r-1} c_{0i} s^i$. Полином, стоящий в знаменателе последней дроби, имеет только четные степени s. Поэтому и в соответствии с леммой о факторизации [4], существует единственный полином $c_0(s)$ n-го порядка с корнями, лежащими в левой полуплоскости (устойчивый полином), для которого

$$s^{2n} + (-1)^n R_{c0}(-s) R_{c0}(s) = (-1)^n c_0(-s)\, c_0(s).$$

Отсюда и из предыдущего факторизационного равенства следует **основной результат:**

Оптимальная система (3)–(5) *имеет характеристический полином* $c_0(s)$.

Таким образом, задача сводится к нахождению всех корней уравнения

$$s^{2n} + (-1)^n R_{c0}(-s) R_{c0}(s) = 0. \tag{6}$$

Интерес вызывают случаи, когда эта задача решается особенно просто. Одна из возможностей появляется в системах с разделением движений, когда задача (6) оказывается связанной с вырожденной системой пониженной размерности. Другая, на которой мы и остановимся в настоящей статье, представляет собой тот случай, когда

$$C_0 = CL = g\, e_{n1}^T \tag{7}$$

для некоторой константы $g \in R^1$. Действительно, в этом случае в (6) $R_{c0}(-s) R_{c0}(s) = g^2$ и после замены переменной $p = s/g^{1/n}$ получим для передаточной функции $\tilde{\Phi}_0(p) = \Phi_0(s/g^{1/n})$ следующее соотношение: $\tilde{\Phi}_0(p) = \dfrac{\tilde{R}_0(p)}{g\, c_0(p)}$, где полином c_0 в данном случае оказывается многочленом Баттерворта [4]. Легко показать, что матрицы исходного критерия r вычисляются с помощью соотношений:

$$Q = (L^{-1})^T (C_0^T C_0 + a^T a) L^{-1}, \qquad N = -a\, L^{-1},$$

причем сформулированное выше условие существования критерия очевидно выполнено.

Таким образом, по крайней мере при условии (7), представленный алгоритм может оказаться существенно проще традиционного решения, использующего матричное уравнение Риккати.

Список использованной литературы

1. Дубовик С.А. Синтез линейных сингулярно возмущенных систем // Динам. системы. – 1999. – Вып.15.–С. 45–49.
2. Дубовик С.А. Аналитическое конструирование регуляторов для сингулярно возмущенных систем // Проблемы управления и информатики.–1999.– №5.–С. 54–68.
3. Александров А.Г. Синтез регуляторов многомерных систем. – М.: Машиностроение, 1986.– 262 с.
4. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления.–М.: Наука, 1986.– 616 с.

Поступила в редколлегию 23.11.99