

УДК 539.3

В. Н. ТИЩЕНКО, канд. физ.-мат. наук, Симфероп. ун-т

КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ ТОНКИХ ПЛАСТИН

В статье проведено систематическое построение теории поперечных и продольных колебаний “тонких” пластин толщины $2h$, которая описывает переходные процессы. Основное содержание работы – получение уравнений динамики упругого слоя с конечной фазовой скоростью распространения всех гармоник в интегральном представлении Фурье решений уравнений теории упругости относительно векторов смещений \bar{u} и нормальных напряжений $\bar{\sigma}_z = \bar{\sigma}$, где z – нормальная координата. Дано сравнение с известными двухпараметрическими теориями изгибных и продольных колебаний балок типа Тимошенко, выделены новые аспекты физических процессов в пластинах вдали от контурной поверхности пластины.

Уравнения состояния упругой среды – закон Гука – можно записать в виде

$$\frac{d\bar{u}}{dz} = \hat{m}_1 \bar{u} + \hat{m}_2 \bar{\sigma}, \quad (1)$$

$$\hat{m}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\xi \\ 0 & 0 & -\eta \\ -B\xi & -B\eta & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{m}_2 = \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad B = 1 - 2\gamma, \\ \gamma = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \leq \frac{1}{2};$$

μ, λ – модули упругости, ξ, η – символы дифференциальных операторов $\partial/\partial x, \partial/\partial y$ соответственно.

Уравнения движения

$$\text{div } \hat{\sigma} = \rho \ddot{\bar{u}} - \rho \bar{g},$$

где $\hat{\sigma}$ – тензор напряжений, $\rho \bar{g}$ – вектор плотности объемных сил, ρ – плотность, после исключения компонент $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ через $\bar{\sigma}$ и \bar{u} , могут быть записаны в виде, подобном (1):

$$\frac{d\bar{\sigma}}{dz} = \hat{m}_3 \bar{u} + \hat{m}_4 \bar{\sigma}, \quad (2)$$

$$\hat{m}_3 = \mu \begin{pmatrix} -\xi^2 - A\eta^2 & (1-A)\xi\eta & 0 \\ (1-A)\xi\eta & -\eta^2 - A\xi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \rho\omega^2 \hat{e}, \quad \hat{m}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -B\xi \\ 0 & 0 & -B\eta \\ -\xi & -\eta & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = 4(1 - \gamma),$$

ω – символ дифференцирования по времени t , \hat{e} – единичная матрица третьего ранга.

Объединение уравнений (1), (2) приводит к общему матричному уравнению

$$\frac{d\vec{f}}{dz} = \hat{M}\vec{f} + \vec{g}_0, \quad (3)$$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \vec{g}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho\vec{g} \end{pmatrix}, \quad \hat{M} = \begin{pmatrix} \hat{m}_1 & \hat{m}_2 \\ \hat{m}_3 & \hat{m}_4 \end{pmatrix}$$

которое должно быть дополнено граничными условиями при $z = \pm h$.

Граничные условия определяют как тип напряженного состояния (пластина, покрытие), так и вид колебаний (продольные, поперечные). Так, например, при задании напряжений при $z = \pm h$, что $\sigma_{zz}(h) = -\sigma_{zz}(-h)$, $\sigma_{xz}(h) = \sigma_{xz}(-h)$, $\sigma_{yz}(h) = \sigma_{yz}(-h)$, такое состояние определяет поперечные колебания пластины. При $\sigma_{zz}(h) = \sigma_{zz}(-h)$, $\sigma_{xz}(h) = -\sigma_{xz}(-h)$, $\sigma_{yz}(h) = -\sigma_{yz}(-h)$ возбуждаются продольные колебания. Если заданы $\vec{\sigma}(h)$ и $\vec{u}(-h)$, то такое состояние можно назвать продольными колебаниями в покрытиях, равно, как и задание $\vec{u}(h)$, $\vec{u}(-h)$.

Теорию продольных и поперечных колебаний пластинок будем строить, исходя из представления решений $\vec{f}(z)$ в виде ряда Маклорена:

$$\vec{f}(z) = \vec{f}(0) + \frac{d\vec{f}}{dz}(0)z + \frac{1}{2!} \frac{d^2\vec{f}}{dz^2}(0)z^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3\vec{f}}{dz^3}(0)z^3 + \dots, \quad (4)$$

имея в виду, что объемные силы $\vec{g}_0(z)$ также представлены в виде ряда.

Считая, что частное решение $\vec{f}_0 = (\vec{u}_0, \vec{\sigma}_0)^T$, удовлетворяющее неоднородному уравнению, может быть получено тривиально, представим разложением вида (4) решения однородного уравнения. Тогда из однородного уравнения (3) следует

$$\frac{d\vec{f}}{dz} = \hat{M}\vec{f}, \quad \frac{d^2\vec{f}}{dz^2} = \hat{M}^2\vec{f} = \hat{N}\vec{f}, \quad \frac{d^3\vec{f}}{dz^3} = \hat{M}^3\vec{f} = \hat{L}\vec{f}$$

и его решение можно записать в виде:

$$\vec{f}(z) = (\hat{E} + \hat{M}z + \frac{1}{2}\hat{N}z^2 + \frac{1}{6}\hat{L}z^3)\vec{f}(0).$$

Из граничных условий для пластины следует:

$$\bar{\sigma}(h) = (\hat{m}_3 + \frac{1}{2}\hat{n}_3h + \frac{1}{6}\hat{l}_3h^2)h\bar{u}(0) + (\hat{e} + \hat{m}_4h + \frac{1}{2}\hat{n}_4h^2 + \frac{1}{6}\hat{l}_4h^3)\bar{\sigma}(0) + \bar{\sigma}_0(h),$$

$$\bar{\sigma}(-h) = -(\hat{m}_3 - \frac{1}{2}\hat{n}_3h + \frac{1}{6}\hat{l}_3h^2)h\bar{u}(0) + (\hat{e} - \hat{m}_4h + \frac{1}{2}\hat{n}_4h^2 - \frac{1}{6}\hat{l}_4h^3)\bar{\sigma}(0) + \bar{\sigma}_0(-h),$$

или

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{\bar{\sigma}(h) + \bar{\sigma}(-h)}{2} = \frac{1}{2}\hat{n}_3h^2\bar{u}(0) + (\hat{e} + \frac{1}{2}\hat{n}_4h^2)\bar{\sigma}(0) + \frac{\bar{\sigma}_0(h) + \bar{\sigma}_0(-h)}{2},$$

$$\bar{\sigma}_2 = \frac{\bar{\sigma}(h) - \bar{\sigma}(-h)}{2h} = (\hat{m}_3 + \frac{1}{6}\hat{l}_3h^2)\bar{u}(0) + (\hat{m}_4 + \frac{1}{6}\hat{l}_4h^2)\bar{\sigma}(0) + \frac{\bar{\sigma}_0(h) - \bar{\sigma}_0(-h)}{2h}.$$

В дальнейшем естественно искать главные члены решений с точностью до членов порядка $h^2(\xi^2 + \eta^2)$ в сравнении с единицей, т.е.

$$\hat{e} + \frac{1}{2}\hat{n}_4h^2 \approx \hat{e}, \quad \hat{m}_3 + \frac{1}{6}\hat{l}_3h^2 \approx \hat{m}_3 + \frac{1}{6}\hat{m}_4\hat{n}_3 \quad (\hat{l}_3 = \hat{m}_3\hat{n}_1 + \hat{m}_4\hat{n}_3),$$

тогда

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_1 = \frac{1}{2}\hat{n}_3h^2\bar{u}(0) + \bar{\sigma}(0) + \bar{\sigma}_{01}; \\ \bar{\sigma}_2 = (\hat{m}_3 + \frac{1}{6}\hat{m}_4\hat{n}_3h^2)\bar{u}(0) + (\hat{m}_4 + \frac{1}{6}\hat{l}_4h^2)\bar{\sigma}(0) + \bar{\sigma}_{02}. \end{cases}$$

Эта система уравнений для векторов $\bar{u}(0)$, $\bar{\sigma}(0)$ может быть сведена к системе линейных уравнений вида:

$$\hat{K}\bar{u}(0) = \bar{b}, \quad \hat{K} = \hat{m}_3 - \frac{1}{3}\hat{m}_4\hat{n}_3h^2, \quad \bar{b} = -\hat{m}_4(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_{01}) - \bar{\sigma}_{02} + \bar{\sigma}_2. \quad (5)$$

Таким образом, получено уравнение для перемещений срединной поверхности в случае пластины, т.е. при задании напряжений на поверхностях $z = \pm h$.

Матричный оператор \hat{K} с точностью до членов $h^2\Delta$ равен

$$\hat{K} = \mu \begin{pmatrix} -\xi^2 - A\eta^2 + \frac{\rho}{\mu}\omega^2 & (1-A)\xi\eta & 0 \\ (1-A)\xi\eta & -\eta^2 - A\xi^2 + \frac{\rho}{\mu}\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho}{\mu}\omega^2 - \frac{Ah^2\Delta}{6} \left(\frac{\rho\omega^2}{\mu} - 2\Delta \right) \end{pmatrix},$$

$$\Delta = \xi^2 + \eta^2.$$

Таким образом, уравнения колебаний тонких пластин будут описываться уравнениями:

$$\det \hat{K}\vec{u}(0) = \sum_{i=1}^3 b_i \vec{\Delta}_i, \quad (6)$$

где

$$\det \hat{K} = (\rho\omega^2 - \mu\Delta)(\rho\omega^2 - A\mu\Delta) \left[\rho\omega^2 - \mu \frac{Ah^2}{6} \Delta \left(\frac{\rho\omega^2}{\mu} - 2\Delta \right) \right] = K_1 K_2 K_3$$

$$\vec{\Delta}_1 = \begin{pmatrix} [\rho\omega^2 - \mu(\eta^2 + A\xi^2)]K_3 \\ -(1-A)\xi\eta K_3 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{\Delta}_2 = \begin{pmatrix} -(1-A)\xi\eta K_3 \\ [\rho\omega^2 - \mu(\xi^2 + A\eta^2)]K_3 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{\Delta}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ K_1 K_2 \end{pmatrix}$$

Система уравнений (6) определяет три типа колебаний: крутильные (вращательные) уравнением:

$$(\rho\omega^2 - \mu\Delta)\Omega = \Psi; \quad (7)$$

продольные (осесимметричные) уравнением:

$$(\rho\omega^2 - A\mu\Delta)\Theta = \Phi; \quad (8)$$

и поперечные колебания уравнением

$$\left[\rho\omega^2 - A \frac{h^2}{6} \Delta (\rho\omega^2 - 2A\mu\Delta) \right] u_3 = b_3; \quad (9)$$

где

$$u_1 = \xi\Theta + \eta\Omega, \quad u_2 = \eta\Theta - \xi\Omega, \quad b_1 = \xi\Phi + \eta\Psi, \quad b_2 = \eta\Phi - \xi\Psi$$

Важным аспектом этих уравнений является ограничение фазовых скоростей распространения волн, что соответствует принципу причинности физических явлений. Это следует из дисперсионных соотношений для трех типов движения пластины:

$$\begin{aligned} \text{крутильные:} \quad & -\omega_1^2 + c_2^2 k^2 = 0; \\ \text{продольные:} \quad & -\omega_1^2 + A c_2^2 k^2 = 0; \\ \text{поперечные:} \quad & -\omega_3^2 + A h^2 k^2 (\omega_3^2 - 2c_2^2 k^2) / 6 = 0; \end{aligned} \quad (10)$$

$k^2 = -\Delta$, $\omega_i^2 = -\omega^2$ ($i = 1, 2, 3$) – соответственно квадраты волновых чисел и частот, в терминах которых излагается волновая динамика нестационарных процессов в средах [1], если решения представлять в виде интегралов Фурье по времени и координатам.

Фазовые скорости $c_i = \omega_i/k$ ($i = 1, 2, 3$) для первых двух типов движения постоянны и равны c_2 и $c_2\sqrt{A}$ соответственно. Поперечные колебания имеют переменную скорость c_3 распространения отдельных гармоник с волновым числом k :

$$c_3(k) = \sqrt{\frac{A}{3}} \frac{kh}{\sqrt{1 + \frac{Ah^2 k^2}{6}}} c_2, \quad c_3 \leq \sqrt{2} c_2 = c_m, \quad (11)$$

являясь при этом монотонной функцией.

Асимптотическое поведение волн с дисперсией для больших r и t цилиндрической системы координат описывается волновыми пакетами вида [1]:

$$u_3 = \sum_{i=1}^N a_i(r, t) \cos \theta_i(r, t),$$

где

В. Н. Тищенко

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial r} = k_i(r, t), \quad \frac{\partial \theta_i}{\partial t} = -\omega_3(k_i),$$

$$\frac{d\omega_3}{dk_i} = \frac{r}{t}, \quad \frac{da_i^2}{dt} = -\frac{2a_i^2}{t} \quad \text{при } k = k_i = \text{const}$$

Величина $d\omega_3/dk$ является групповой скоростью и играет существенную роль при переносе энергии возбуждаемых в начале координат волновых движений среды. В нашем случае групповая скорость имеет выражение

$$C(k) = \frac{d\omega_3}{dk} = \sqrt{\frac{A}{3}} k h c_2 \frac{2 + \frac{Ah^2}{6} k^2}{(1 + \frac{Ah^2}{6} k^3)^{3/2}},$$

и не является монотонной функцией – имеет максимум при $Ah^2 k^2 = 12$, так что $C_m = 1,09 c_2 \sqrt{2} = 1,09 c_m$.

Таким образом уравнение

$$C(k_i) = r/t \tag{12}$$

имеет один корень $k_1(r/t)$, пока $r/t < c_m$, и два корня $k_1(r/t)$ и $k_2(r/t)$ для $c_m < r/t < C_m$ (рис.1). Для $r/t > C_m$ уравнение (12) решений не имеет.

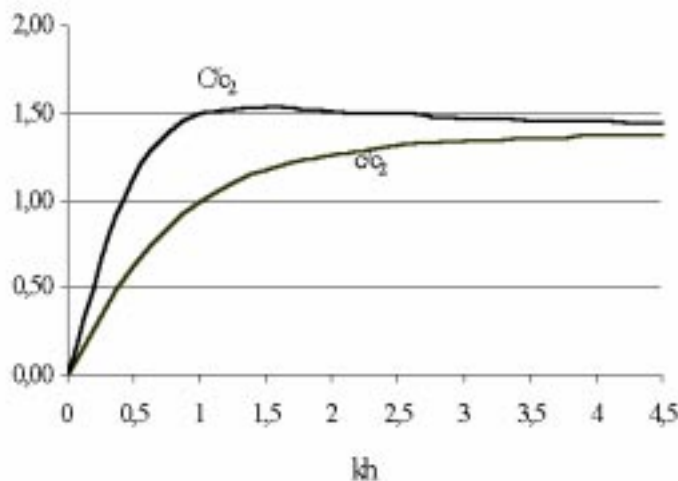


Рис. 1.

Это позволяет сделать вывод, что для $r/t > C_m$ волны отсутствуют (если возбуждение происходит из состояния покоя), для $c_m < r/t < C_m$ существуют две затухающие моды, для $r/t < c_m$ – одна волновая мода. Область $c_m < r/t < C_m$ составляет только 9% длины волновой моды, что позволяет говорить о величине $c_m = c_2 \sqrt{2}$ как о скорости распространения фронта волны поперечных колебаний, которая находится между скоростями c_2 и c_1 .

Отметим основные моменты отличия полученной прикладной теории поперечных (изгибных), продольных и крутильных колебаний тонких пластин от существующих двухпараметрических теорий (параметры α , β) типа Тимошенко [2]:

1. Для корректного построения теории необходимо удерживать в разложении по степеням z члены до третьего порядка включительно; отличие в численном значении максимальной фазовой скорости поперечных колебаний при квадратичном разложении порядка 40%.

2. Для согласования результатов предложенной теории с существующими [2] необходимо положить

$$\alpha = 6\left(\frac{A}{B} - \beta\right), \quad (\beta \neq 0),$$

что значительно отличается от принятых теорий, в которых величины α , β равны или меньше единицы; например, если $\alpha = 0$, то $\beta = 2/\nu$, где ν – коэффициент Пуассона, принимающий значения $0 \leq \nu \leq 0,5$, т.е. $\beta > 4$;

3. Наличие волнового фронта поперечных колебаний с конечной скоростью распространения, не зависящей от толщины пластины, в специальной литературе не выделяется, что позволяет считать полученный результат новым. В отличие от продольных колебаний эта волна обладает дисперсией, т.е. меняет свою форму при движении, тогда как продольная волна в основном не меняет своей формы, двигаясь с постоянной скоростью $c_2 \sqrt{A}$. Полученный результат позволяет утверждать о существовании поперечных волн отражения при тех или иных граничных условиях для пластины конечных размеров. Решение краевых задач уравнений волновой динамики является следующим этапом в изучении динамики строительных конструкций, для которых основным конструктивным элементом является пластина.

В. Н. Тищенко

Список использованной литературы

1. Уизем Дж. Дж. Линейные и нелинейные волны. Пер. с англ. – М.: Мир, 1975. – 607 с.
2. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник, т.3 Под редакцией И. А. Биргера, Я. Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – 568 с.

Поступила в редколлегию 10.11.98

Колебания упругих тонких пластин