УДК 681.511.46

Е. А. ШУШЛЯПИН, канд. техн. наук, Севастоп. гос. техн. ун-т

АЛЬТЕРНАТИВНАЯ ФОРМА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Для линейно-квадратической задачи предложена альтернативная форма оптимального управления, показана эквивалентность известной и альтернативной форм.

Рассмотрим линейно-квадратическую задачу

$$\left.\begin{aligned} & J = x^T(t_f)Fx(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} x^T Qx + u^T Rud\tau \to \min, \\ & \frac{dx}{dt} = Ax + Bu,\ t \in [t_0, t_f],\ x(t_0) = x^0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где $F = (n \times n),\ Q = (n \times n),\ R = (r \times r),\ A = (n \times n),\ B = (n \times r)$ - матрицы (Q, R, A, B - в общем случае функции времени t);

x, u - соответствующей размерности векторы состояния и управления.

Традиционно предполагается, что Q и F - неотрицательно определенные, R - положительно определенная матрицы.

Для задачи (1) известно оптимальное управление вида:

$$\left.\begin{aligned} & u = Kx, \\ & K = -R^{-1}B^T P, \\ & \frac{dP}{dt} = -PA - A^T P + PBR^{-1}B^T P - Q, \\ & t \in [t_0, t_f], P(t_f) = F. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

В работе [1] получена новая форма оптимального управления для линейно-квадратической задачи:

$$\left.\begin{aligned} & u = -R^{-1}B^T W^T (Fx(t_f) + \Omega), \\ & \Omega = \int_t^{t_f} Q_W Wxd\,\tau,\ Q_W = \left(W^{-1}\right)^T QW^{-1}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Здесь и в последующих выкладках $W = W(t_f, t)$ - матрица весовых функций, рассматриваемая как функция второго аргумента t, I – единичная матрица, $x(t_f)$ – конечное состояние системы.

В [1] управление (3) построено путем применения принципа максимума к эквивалентной форме линейно-квадратической задачи, записанной через переменные

$$y(t_f, t) = W(t_f, t) \cdot x(t), \tag{4}$$

где векторная переменная y как функция второго аргумента определяется векторно-матричной системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} = WBu, \\ &y(t_f, t_0) = W(t_f, t_0)x^0 \equiv y^0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Уравнения (5) целесообразно именовать моделью конечного состояния (МКС) [2], так как смысл переменных $y(t_f, t)$ - конечное состояние системы в предположении, что на интервале $[t, t_f]$ управление $u(t) = 0$, а состояние системы в момент t – $x(t)$. Другими словами, переменные МКС - это прогноз неуправляемого конечного состояния. Между переменными x и y имеет место связь (4), из которой следует, что $y(t_f, t_f) = x(t_f)$ в силу $W(t_f, t_f) = I$. Равенство конечных состояний x и y позволяет решать различные задачи терминального управления на основе МКС.

Управление в форме (3) использовать для практических целей невозможно, так как оно зависит от неизвестных параметров – конечного состояния $x(t_f)$ и состояний x в будущие за моментом расчета управления моменты времени.

Задача упрощается в частном случае, когда матрица критерия $Q = 0$. Тогда зависимость от будущих состояний пропадает и остается один неопределенный вектор - $x(t_f)$. Оказывается, его в данном случае нетрудно получить, умножив u из (3) на WB слева, проинтегрировав левую и правую части в пределах от t до t_f и учитывая (5). В итоге получаем

$$\begin{aligned} &x(t_f) = y(t_f, t_f) = H^{-1} y(t_f, t) = H^{-1} W x, \\ &H = I + GF, \quad G = \int_t^{t_f} WBR^{-1} B^T W^T d\tau. \end{aligned} \tag{6}$$

Соотношение (6), выведенное в [1], устанавливает связь между конечным и любым текущим состояниями переменных МКС y линейно-квадратической задачи в случае $Q=0$. Переменные же y, в свою очередь, связаны с переменными x выражением (4). Таким образом, в итоге получается физически реализуемое управление:

$$u=-R^{-1}B^{T}W^{T}(I+GF)^{-1}Wx. \tag{7}$$

Сравнивая (2) и (7), получаем новое представление решения матричного уравнения Риккати из (2) (при $Q=0$) в виде

$$P(t)=W^{T}F(I+GF)^{-1}W\ . \tag{8}$$

Доказать, что (8) - решение однородного уравнения Риккати, можно и непосредственно, выполнив дифференцирование (8) по времени.

$$\begin{aligned}\dot{P}=&\dot{W}^{T}FH^{-1}W+W^{T}F\dot{H}^{-1}W+W^{T}FH^{-1}\dot{W}=-A^{T}W^{T}FH^{-1}W+\\&+W^{T}F\dot{H}^{-1}W-W^{T}FH^{-1}WA.\end{aligned} \tag{9}$$

В последнем выражении использовано известное определение весовой матрицы как функции второго аргумента:

$$\frac{dW(t_f,t)}{dt}=-W(t_f,t)A(t),\quad W(t_f,t_f)=I. \tag{10}$$

Для вычисления $\dot{H}^{-1}$, где $H=I+GF$, продифференцируем (6) с учетом (1), (7) и (10), имея в виду, что $y(t_f,t_f)$ от t не зависит.

$$0=\dot{H}^{-1}Wx+H^{-1}\dot{W}x+H^{-1}W\dot{x}=\dot{H}^{-1}Wx-H^{-1}WAx+H^{-1}WAx+H^{-1}WBu,$$

$$\dot{H}^{-1}Wx=-H^{-1}WBu=H^{-1}WBR^{-1}B^{T}W^{T}FH^{-1}Wx\ .$$

Сокращая левую и правую части последнего равенства на Wx, получаем:

$$\dot{H}^{-1}=H^{-1}WBR^{-1}B^{T}W^{T}FH^{-1}. \tag{11}$$

Подставив (11) в (9), имеем:

$$\dot{P}==-A^{T}W^{T}FH^{-1}W-W^{T}FH^{-1}WA+W^{T}FH^{-1}WBR^{-1}B^{T}W^{T}FH^{-1}W,$$

а с учетом (8) – матричное дифференциальное уравнение для $P(t)$, полностью совпадающее с уравнением Риккати из (2) при $Q=0$.

Таким образом, выражение (8) в самом деле есть решение матричного уравнения Риккати линейно-квадратической задачи (1) при

$Q=0$. Это решение удовлетворяет и граничному условию из (2) $P(t_f)=F$. Учитывая, что при $t=t_f$ $W(t_f,t_f)=I$, $G=0$ (см.(6)), получаем $P(t_f)=F$.

Форма оптимального управления (7) особенно полезна тогда, когда весовая матрица системы может быть рассчитана аналитически. В этом случае мы получаем аналитическое решение матричного уравнения Риккати, выраженное через квадратуры. Известно [3] представление решения уравнения Риккати через фундаментальную матрицу порядка *2n* совместной системы исходных и сопряженных переменных. Ввиду значительно меньшего порядка уравнений для определения столбцов весовой матрицы (*n*) в сравнении с уравнениями Риккати (*n(n+1)/2*) и представления из (3) (*2n*) очевидно, что возможность получить аналитические выражения для весовой матрицы значительно более вероятна. В этом смысле представление (8) имеет преимущества в сравнении с указанными.

Рассмотрим далее общий случай $Q\neq 0$ и получим физически реализуемую альтернативную форму оптимального управления. Для этого прежде всего приведем независимое от [1] доказательство того, что управление (3) оптимально. Введем переменные $v=Px$ и $v_1=W^T h$, $h=Fx(t_f)+\Omega$ и покажем, что v при известном (2) и v_1 при альтернативном (3) управлениях удовлетворяют одним и тем же векторно-матричным дифференциальным уравнениям. Так как v и v_1 представляют различающиеся части управлений (2) и (3), а (2) - оптимально, то равенство v и v_1 будет означать оптимальность (3).

$$\begin{aligned}
\dot v &= \dot P x + P\dot x = \dot P x + PAx + PBu = -PAx - A^T Px + PBR^{-1}BPx - Qx + \\
&\quad + PAx - PBR^{-1}B^T Px = -A^T Px - Qx = -A^T v - Qx,\\
\dot h &= \dot\Omega = -Q_W y = -Q_W Wx,\\
\dot v_1 &= \dot W^T h + W^T \dot h = -A^T W^T h - W^T Q_W Wx = -A^T v_1 - Qx.
\end{aligned}$$

Как видим, дифференциальные уравнения для v и v_1 одинаковы. Осталось показать, что и граничные условия для этих уравнений одинаковы. В самом деле,

$$\begin{aligned}
v(t_f) &= P(t_f)x(t_f) = Fx(t_f),\\
v_1(t_f) &= W^T(t_f,t_f)Fx(t_f) + \Omega(t_f) = Fx(t_f).
\end{aligned}$$

Физически реализуемое альтернативное управление при этом может быть рассчитано через введенную выше функцию h, начальное условие для которой следует из соотношений:

$$
\begin{aligned}
&v(t_0) = P(t_0)x(t_0) = v_1(t_0) = W^T(t_f, t_0)h(t_0), \\
&h(t_0) = (W^T(t_f, t_0))^{-1} P(t_0)x(t_0).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Само же управление определяется соотношениями:

$$
\dot{h} = -(W^{-1})^T Qx, \quad u = -R^{-1}B^T W^T h. \tag{13}
$$

К сожалению, альтернативная форма (12)–(13) для общего случая линейно-квадратической задачи требует больших вычислительных затрат при расчете управления, чем известная форма (2). В частности, для расчета начальных условий (12) необходимо предварительно интегрировать уравнения Риккати. Альтернативная же форма (7) для частного случая $Q = 0$ в сравнении с (2) во многих случаях более удобна для реализации.

Алгоритмы (7) и (12)-(13) проверялись компьютерным моделированием, результаты которого подтвердили эквивалентность известной (2) и альтернативных (7) и (12)-(13) форм управлений.

Список использованной литературы

1. Шушляпин Е.А. Оптимальное управление нестационарными линейными терминальными системами по модели конечного состояния // Вестник СевГТУ: Сб. науч. тр. – Севастополь, 1998. – Вып. 14. – С. 34 – 38.

2. Шушляпин Е.А. Синтез линейных и нелинейных систем управления конечным положением на основе моделей конечного состояния // Проблемы управления и информатики. – 1997. –№3. – С. 10 – 16.
3. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. – М.: Наука, 1971. – 396с.

Поступила в редколлегию 12.06.99