

И. Б. ШКЛЯР, асп., Донецкий гос. ун-т

ДЕЙСТВИЕ ДВИЖУЩИХСЯ НАГРУЗОК, РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПО КРУГОВЫМ ОБЛАСТЯМ, НА ОБОЛОЧКИ

Решена задача о действии на пологую изотропную оболочку положительной гауссовой кривизны равномерно движущейся локальной нагрузки, распределенной по круговым областям, с плотностью распределения нагрузки в виде степенной функции с показателем μ – целое. Рассматриваются случаи $\mu = 0$, что соответствует равномерно распределенной нагрузке по площади круга и $\mu = -1$. Полученные решения исследуются в зависимости от радиуса круговой области, по которой распределена нагрузка, геометрии оболочки и скорости движения нагрузки.

Рассматривается изотропная оболочка положительной гауссовой кривизны толщиной h под действием локальной нагрузки $P(x_1, y_1, t)$, распределенной по круговой области S с радиусом R , движущейся по направлению оси Y_1 с постоянной скоростью V_0 . Предполагается, что «так было всегда» – начало процесса отсутствует, т. е. есть решается стационарная задача [1].

Для исследования напряженно-деформированного состояния оболочки используем уравнения классической теории оболочек [2]:

$$L_{ij}U_i + \delta_{i3}\rho h \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} = \delta_{i3}P(x_1, y_1, t), \quad (i, j = \overline{1,3}) \quad (1)$$

$$L_{11} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \right); \quad L_{12} = \frac{Eh}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_1}; \quad L_{12} = L_{21};$$

$$L_{13} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (k_1 + \nu k_2) \frac{\partial}{\partial x_1}; \quad L_{22} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right);$$

$$L_{23} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (k_2 + \nu k_1) \frac{\partial}{\partial y_1}; \quad L_{13} = L_{31}; \quad L_{23} = L_{32};$$

$$L_{33} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\nabla^2 \nabla^2 + \frac{12}{h^2} (k_1^2 + 2\nu k_1 k_2 + k_2^2) \right);$$

$$P(x_1, y_1, t) = \begin{cases} q_0 \left(1 - (x_1^2 + (y_1 - V_0 t)^2) R^{-2} \right)^\mu, & (x_1, y_1) \in S \\ 0, & (x_1, y_1) \notin S \end{cases}$$

где U_i – перемещение точек срединной поверхности в направлении координатных осей X_1, Y_1, Z_1 ; δ_{ij} – символ Кронекера; ∇^2 – оператор Лап-

ласа; k_1, k_2 – главные кривизны; E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона; ρ – массовая плотность материала; t – время.

Учитывая то, что скорость движения нагрузки постоянна, решение задачи проведем в подвижной системе координат [1,2] $x_2 = x_1, y_2 = y_1 - V_0 t$. В этой системе координат система разрешающих уравнений (1) примет вид

$$L_{ij}U_i + \delta_{i3}\rho hV_0^2 \frac{\partial^2 U_3}{\partial y_2^2} = \delta_{i3}P(x_2, y_2), \quad (i, j = \overline{1,3}) \quad (2)$$

Решение системы (2) находим с помощью двумерного интегрального преобразования Фурье. В пространстве трансформант, после перехода к безразмерной системе координат $x = x_2/h, y = y_2/h$, уравнения (2) примут вид

$$L_{ij}\overline{U}_i = \delta_{i3}\overline{P}(\xi, \eta), \quad (i, j = \overline{1,3}) \quad (3)$$

где $l_{11} = \xi^2 + \frac{1-\nu}{2}\eta^2; l_{12} = \frac{1+\nu}{2}\xi\eta; l_{13} = ((hk_1) + \nu(hk_2))i\xi; l_{21} = l_{12};$

$$l_{22} = \eta^2 + \frac{1-\nu}{2}\xi^2; \quad l_{23} = ((hk_2) + \nu(hk_1))i\eta; \quad l_{33} = -l_{31}; \quad l_{32} = -l_{32};$$

$$l_{33} = \frac{1}{12}(\xi^2 + \eta^2)^2 - \alpha\eta^2 + (hk_1)^2 + 2\nu(hk_1)(hk_2) + (hk_2)^2;$$

$$\overline{P}(\xi, \eta) = q_0 r_0^2 2^\mu \Gamma(\mu + 1) \left(r_0 \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \right)^{-(\mu+1)} J_{\mu+1} \left(r_0 \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \right), \quad [\operatorname{Re} \mu > -1];$$

ξ, η – переменные в пространстве трансформант; \overline{U}_i – безразмерные трансформанты перемещений; (hk_i) – безразмерные главные кривизны; r_0 – безразмерный радиус; $J_\nu(z)$ – функция Бесселя 1-го рода порядка ν ; $\alpha = \rho V_0^2(1 - \nu^2)/E$.

Решение системы (3) для прогиба имеет вид

$$\overline{U}_1 = -12\overline{P}(hk_2) \frac{\Delta_1}{\Delta} i\xi; \quad \overline{U}_2 = -12\overline{P}(hk_2) \frac{\Delta_2}{\Delta} i\eta; \quad \overline{U}_3 = 12\overline{P} \frac{(\xi^2 + \eta^2)^2}{\Delta}; \quad (4)$$

$$\Delta_1 = \xi^2(\lambda + \nu) + \eta^2(2\lambda + \lambda\nu - 1); \quad \Delta_2 = \xi^2(2 - \lambda + \nu) + \eta^2(\lambda\nu + 1);$$

$$\Delta = (\xi^2 + \eta^2)^4 - 12\alpha\eta^2(\xi^2 + \eta^2)^2 + k^4(\xi^2 + \lambda\eta^2)^2;$$

$$k^4 = 12(1 - \nu^2)(hk_2)^2; \quad \lambda = k_1/k_2.$$

Аналогичным образом, применяя двумерное преобразование Фурье и подставляя значения \overline{U}_i из (4), получим трансформанты

мембранных усилий, моментов и перерезывающих сил [6]. Например, $\overline{T_{1,2}}$ и $\overline{M_{1,2}}$ примут вид

$$\overline{T_{1,2}} = 6\overline{P}(hk_2)(1-v^2)\left[(\xi^2 + \eta^2) \mp (\xi^2 - \eta^2)\right](\xi^2 + \lambda\eta^2)\Delta^{-1};$$

$$\overline{M_{1,2}} = 6\overline{P}(hk_2)(1+v)\left[(1+v)(\xi^2 + \eta^2) \pm (1-v)(\xi^2 - \eta^2)\right](\xi^2 + \eta^2)^2 \Delta^{-1}.$$

Оригиналы всех компонент напряженно-деформированного состояния находятся при помощи формулы обращения для двумерного преобразования Фурье. Методика построения оригиналов функций изложена на примере функции прогиба.

Учитывая свойства четности и нечетности подынтегральных функций, переходя к полярной системе координат, понижая степень знаменателя и используя известное разложение Ангера-Якоби [3], получим

$$U_3(r, \varphi) = -\frac{24}{\pi k^2} q_0 r_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n \cos(2n\varphi) \operatorname{Im} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2n\theta)}{t^2} I_1 d\theta; \quad (5)$$

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{\rho^{-\mu} J_{1+\mu}(r_0\rho) J_{2n}(r\rho)}{\rho^2 + d^2} d\rho; t^2 = \cos^2 \theta + \lambda \sin^2 \theta; \varepsilon_n = \begin{cases} 1, n=0 \\ 2, n \geq 1 \end{cases}$$

где $J_\nu(z)$ – функция Бесселя 1 рода; $d = k\sqrt{it^2 - \chi}$; $\chi = \beta \sin^2 \theta$; $\beta = 6\alpha/k^2$; $\operatorname{Re} d > 0$.

Вычисляя внутренний интеграл I_1 , окончательно получим для $\mu = 0$ [4]:

$$I_1^0 = \frac{(-1)^n}{d} \begin{cases} -I_{2n}(rd)K_1(r_0d) + \begin{cases} 1/r_0d, & n=0 \\ 0, & n \geq 1 \end{cases} & [r \leq r_0]; \\ -\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=m+1}^n \frac{(-1)^{k+n} (n+k-1)! (r_0d)^{2m+1} \left(\frac{2}{rd}\right)^{2k}}{(n-k)! m! (m+1)!} & [r \geq r_0], \end{cases} \quad (6)$$

для $\mu = -1$

$$I_1^{-1} = (-1)^n \begin{cases} I_{2n}(rd)K_0(r_0d), & [r \leq r_0]; \\ -\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=m+1}^n \frac{(-1)^{k+n} (n+k-1)! (r_0d)^{2m} \left(\frac{2}{rd}\right)^{2k}}{(n-k)! m! m!} & [r \geq r_0], \end{cases} \quad (7)$$

где $I_\mu(z), K_\nu(z)$ - модифицированные функции Бесселя 1 и 2 рода.

Аналогичным образом получаем оригиналы остальных искомым функций. Так, для $T_{1,2}$ и $M_{1,2}$ имеем

$$T_{1,2}(r, \varphi) = -\frac{12}{\pi k^2} q_0 r_0 (1 - \nu^2) (hk_2) \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n \cos(2n\varphi) \operatorname{Im} \int_0^{\pi/2} \cos(2n\theta) [1 \mp \cos(2\theta)] I_1 d\theta; \quad (8)$$

$$M_{1,2}(r, \varphi) = \frac{12}{\pi} q_0 r_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n \cos(2n\varphi) \times \\ \times \int_0^{\pi/2} \cos(2n\theta) [(1 + \nu) \pm (1 - \nu) \cos(2\theta)] \left[\operatorname{Re} - \frac{\chi}{t^2} \operatorname{Im} \right] I_1 d\theta.$$

Особенно простой вид приобретают формулы в наиболее опасной точке оболочки – центре загружаемой площадки:

$$U_3(0) = -\frac{24}{\pi k^2} q_0 r_0 \operatorname{Im} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{t^2 d} I_2 d\theta; I_2^0 = \frac{1}{r_0 d} - K_0(r_0 d); I_2^{-1} = dK_0(r_0 d);$$

$$T_{1,2}(0) = -\frac{12}{\pi k^2} q_0 r_0 (1 - \nu^2) (hk_2) \operatorname{Im} \int_0^{\pi/2} [1 \mp \cos(2\theta)] d^{-1} I_2 d\theta; \quad (9)$$

$$M_{1,2}(0) = \frac{12}{\pi} q_0 r_0 \int_0^{\pi/2} [(1 + \nu) \pm (1 - \nu) \cos(2\theta)] \left[\operatorname{Re} - \frac{\chi}{t^2} \operatorname{Im} \right] d^{-1} I_2 d\theta.$$

Остальные компоненты в этом случае равны нулю.

Если в выражениях (5) – (9) устремить $r_0 \rightarrow 0$ при $P = \pi q_0 r_0^2$ для $\mu = 0$ и $P = 2\pi q_0 r_0$ для $\mu = -1$, то получим формулы для сосредоточенной силы [5], а при $\beta = 0$ – известные формулы статики [6].

Исходя из условий существования интегралов типа I_1 из (6), необходимо, чтобы $\operatorname{Re} d > 0$. Из этого приходим к следующим ограничениям на параметр $\alpha < k^2 \lambda / 6$, что соответствует дозвуковым скоростям $V_0 < \sqrt{E(hk_2) / \rho \sqrt{3(1 - \nu^2)}}$.

Численные исследования проводились для изотропных оболочек при значении параметра $\lambda = 1, 1/2$ в зависимости от радиуса окружности нагружения $r_0 \geq 0.68$, при $q_0 = 1$, $\nu = 0.33$, $\rho = 7.8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $E = 2.039 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$.

Графики поведения функции прогиба U_3 в зависимости от радиуса r_0 при $\lambda = 1, 1/2$, $\mu = 0, -1$, представлены на рис. 1 и 2. Кривые 1 – 5 соответствуют скоростям $V_0 = 0 \text{ м/с}, 10 \text{ м/с}, 20 \text{ м/с}, 30 \text{ м/с}, 39 \text{ м/с}$.

Из графиков следует, что при увеличении скорости движения нагрузки значения функций возрастают, а с увеличением радиуса окружности нагружения - убывают, то есть наблюдается как геометрическая, так и динамическая зависимость.

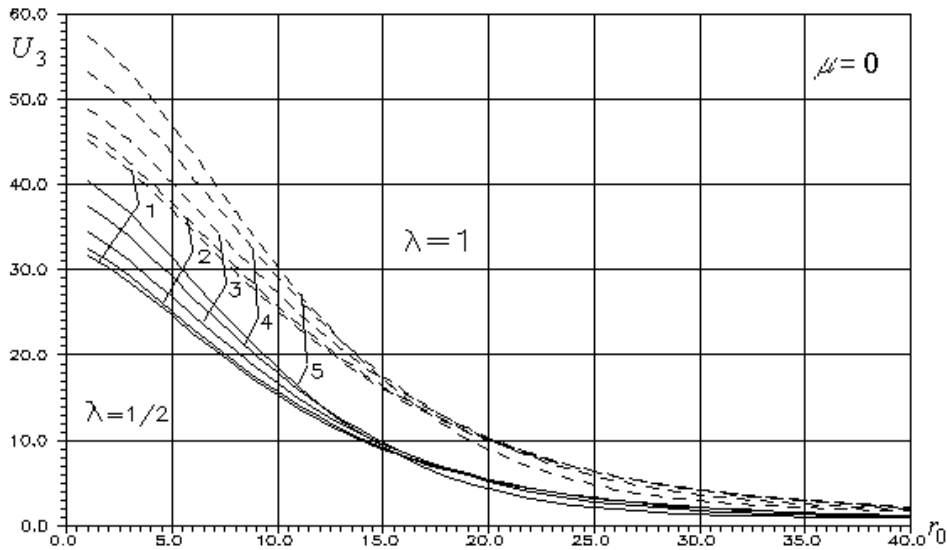


Рис. 1

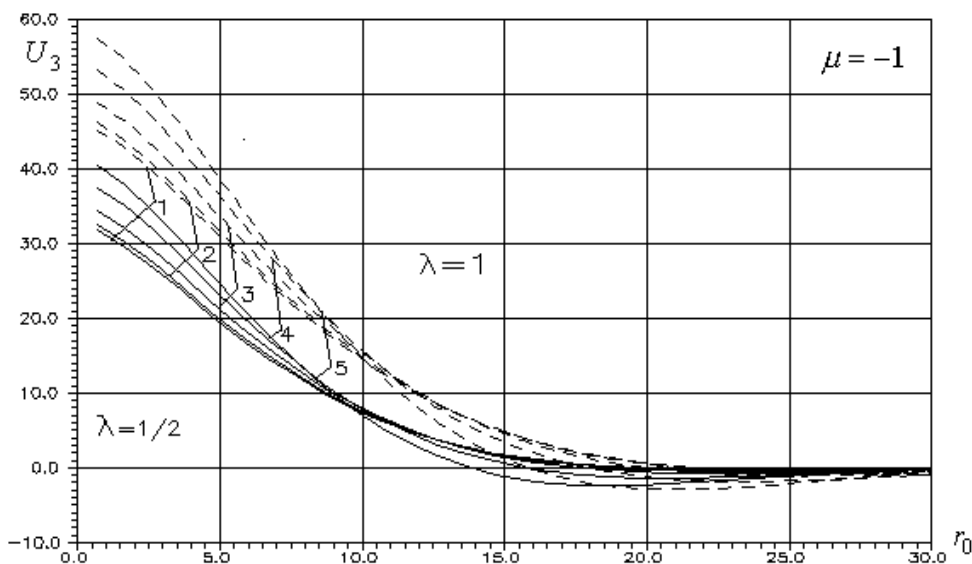


Рис. 2

Список использованной литературы

1. Слепян Л. И. Нестационарные упругие волны.– Л.: Судостроение, 1972.– 376с.
2. Новацкий В. Теория упругости.– М.: Мир, 1975.– 872с.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции II.– М.: Наука, 1974.– 296с.
4. Величко П. М., Хижняк В. К., Шевченко В. П. Местные напряжения в оболочках положительной, нулевой и отрицательной кривизны. //Труды X Всесоюзной Конференции по теории оболочек и пластин (Кутаиси, 1975) Тбилиси: Мецниереба, 1975, с. 31–41.
5. Беева И. Б. Напряженно-деформированное состояние изотропных оболочек под действием равномерно движущейся сосредоточенной силы. – Материалы XXIX Всесоюзной научной конференции: Математика, Новосибирск: Новосибир. ун-т, 1991.– С. 12-17.
6. Хижняк В. К., Шевченко В. П. Смешанные задачи теории пластин и оболочек. – Донецк: ДонГУ, 1980.– 128с.

Поступила в редколлегию 12.05.99