

УДК 539.3

Ю. А. Шевляков, д-р техн. наук, Ю. А. Костандов, канд. физ.-мат. наук,  
А. Н. Рыжаков, канд. физ.-мат. наук, И. Е. Шиповский, канд. техн. наук,  
Симфероп. ун-т

## **ФОРМИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО – ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТРЕХМЕРНОЙ ПЛАСТИНЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ РАСТЯЖЕНИИ.**

На формирование волнового поля напряжений в трехмерной пластине при импульсном нагружении существенным образом влияет наличие в ней дефектов типа трещин и дифракция волн нагружения на свободных торцевых и фронтальных поверхностях пластин, что приводит к возникновению волн разгрузки. Их множественная интерференция существенно затрудняет анализ данных экспериментов по динамическому разрушению пластин с дефектами.

Для описания напряженно - деформированного состояния (НДС) трехмерной пластины с центральной трещиной при импульсном растяжении использована энергетическая модель формирования зоны повышенных напряжений (ЗПН) в области вершины стационарной трещины при динамическом нагружении [1]. При этом модель модифицирована с учетом нестационарности процесса нагружения и влияния свободных поверхностей пластины на напряженно - деформированное состояние центральной части образца.

### **1. Напряженно-деформированное состояние сплошной трехмерной пластины.**

На начальном этапе рассмотрим НДС сплошной бесконечной пластины. Наличие у нее двух свободных фронтальных поверхностей приводит к существенному отличию образующейся в ней волновой картины от наблюдаемой в бесконечном теле. Характер НДС определяется соотношением между толщиной пластины и амплитудно-временными параметрами нагрузки. В случае гармонической нагрузки, когда длина волны  $\lambda \ll d$ , пластину можно рассматривать как бесконечную среду. Если же  $\lambda \gg d$ , то реализуется вырожденный случай тонкой пластины.

Пусть плоскость пластины ориентирована параллельно координатной плоскости  $XOY$ . Формально распространяя граничные условия на фронтальных поверхностях пластины  $\sigma_{ik} n_k = 0$  на всю ее толщину и решая динамические уравнения теории упругости, можно показать [2], что при перпендикулярном торцевом гармоническом воздействии, симметричном относительно срединной плоскости, в пластине генерируется плоская продольная волна со скоростью распространения  $c_{1n}$ :

$$c_{1n} = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}, \quad (1)$$

где  $E$  - модуль Юнга,  $\rho$  - плотность материала пластины,  $\nu$  - коэффициент Пуассона. В такой волне главные напряжения параллельны ( $\sigma_2$ ) и перпендикулярны ( $\sigma_1$ ) ее фронту и связаны простым соотношением:

$$\sigma_2 = \nu\sigma_1, \quad (2)$$

а компоненты вдоль оси  $Z$  равны нулю:  $\sigma_{zi} = 0$ .

Отличие соотношения (2) от аналогичного для бесконечного тела ( $\sigma_2 = \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_1$ ), можно объяснить распространением в пластине плоских продольных волн, «скользящих» вдоль свободных граней пластины, что порождает волны разгрузки.

Особенности формирования и характер волн разгрузки изучались путем численного моделирования НДС сплошной трехмерной прямоугольной пластины и поперечного сечения бесконечного прямоугольного параллелепипеда при симметричном (двухстороннем) динамическом нагружении их линейно нарастающей во времени нагрузкой.

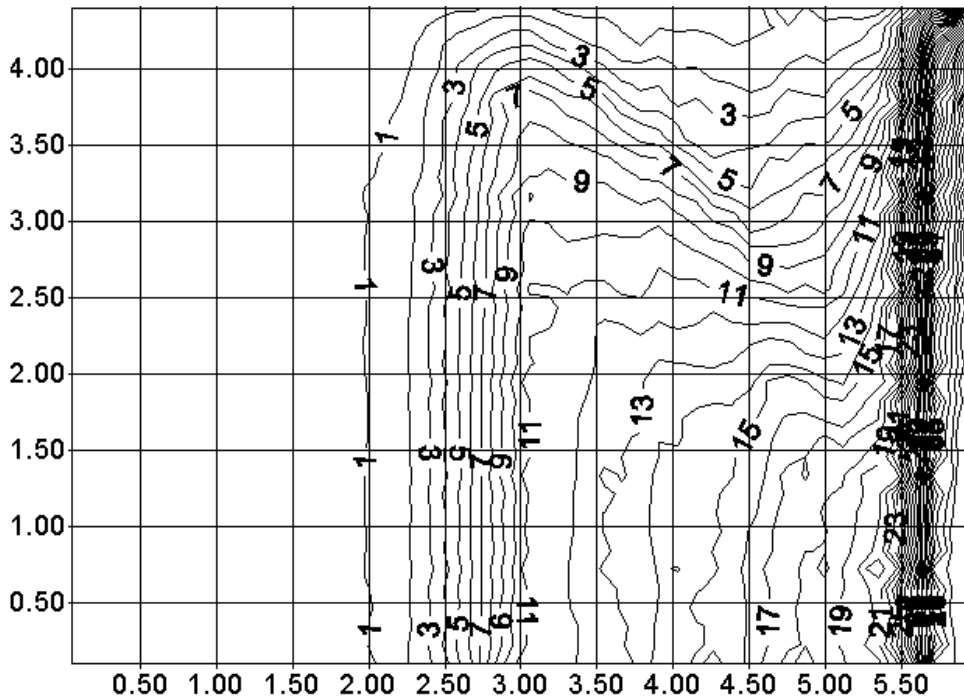


Рис. 1. Искривление изолиний равных напряжений около границы пластины

Характерной особенностью полученных волновых полей является наличие в центральной части пластины (для начальных моментов нагружения) плоских волновых фронтов, для которых главные компоненты тензора напряжений связаны соотношением (2), а скорость распространения волновых фронтов нагружающего импульса в центральной части образца определяется соотношением (1). Полученные данные свидетельствуют о распространении в пластине плоских продольных волн напряжений.

При приближении к границам пластины соотношения (1) и (2) перестают выполняться, а изолинии равных напряжений искривляются

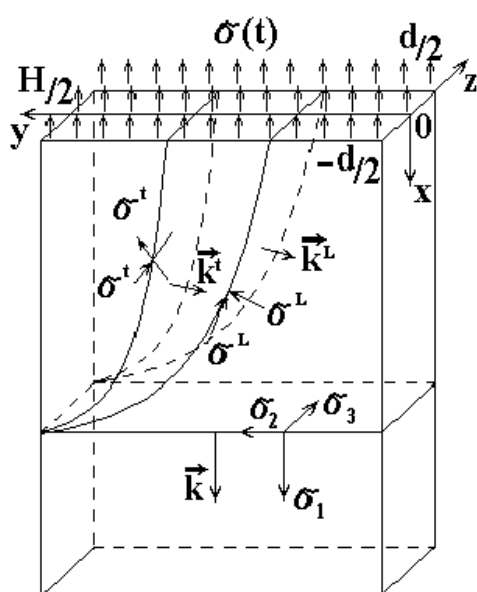


Рис. 2. Схема нагружения пластины и распространения в ней волновых фронтов основной продольной и боковых волн

(рис. 1), что свидетельствует о появлении в этой части пластины волн разгрузки от свободных поверхностей. Продолжая плоские волновые фронты на всю площадь сечения пластины вплоть до свободной границы и вычитая в каждой точке из результирующих компонент тензора напряжений компоненты, описывающие напряженное состояние в продольной волне, можно выделить напряжения в волнах разгрузки (рис. 2). Применение этой методики к результатам численного расчета позволило определить главные компоненты тензора напряжений волн нагрузки на боковой свободной грани пластины. Были выделены главные компоненты продольной  $\sigma_i^L$  и поперечной  $\sigma_i^t$  волн разгрузки. Их зависимость от максимальной компоненты  $\sigma_1$

в основной продольной волне описывают следующие соотношения:

$$\sigma_2 = \nu\sigma_1 = \sigma_3 = -\sigma_1^L, \quad \sigma_3^L = \sigma_2^L = -\nu^2\sigma_1, \quad \sigma_1^t = -\sigma_3^t = \nu(1-\nu)\sigma_1. \quad (3)$$

Эти соотношения справедливы и для описания взаимодействия плоской продольной волны, «скользящей» вдоль свободной границы в бесконечном прямоугольном параллелепипеде, при условии замены  $\nu \rightarrow \nu^* = \nu/(1-\nu)$ , где коэффициент  $\nu^*$  связывает компоненты тензора напряжений плоской продольной волны, распространяющейся в беско-

нечной среде. Для бесконечного прямоугольного параллелепипеда зависимость  $\sigma_2 = \nu^* \sigma_1$  выполняется до момента прихода волн разгрузки в рассматриваемую точку. Следовательно, до этого момента продольная волна распространяется как в бесконечном теле. Из соотношений (3) следует, что на свободной поверхности бесконечного параллелепипеда для суммарных главных компонент тензора напряжений, образующихся в результате интерференции основной волны и волн разгрузки, выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} \sum \sigma_1 &= \left\{ (1-2\nu)/(1-\nu)^2 \right\} \sigma_1, \\ \sum \sigma_2 &= \left\{ \nu(1-2\nu)/(1-\nu)^2 \right\} \sigma_1, \\ \sum \sigma_3 &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

В случае тонкой пластины ( $\lambda \ll d$ ) справедливо предположение о неизменности главных компонент тензора напряжений по толщине пластины. Тогда отношение  $\sum \sigma_2 / \sum \sigma_1 = \nu$  выполняется не только на ее границе, но и в любой внутренней точке. Таким образом, выполнение соотношения (2) означает, что в бесконечно тонкой пластине в результате интерференции основной волны растяжения, «скользящей» вдоль свободных поверхностей пластины, и боковых волн разгрузки формируется волна с плоским фронтом, скорость распространения которого из-за разгрузки фронта основной волны меньше, чем в бесконечном теле, и определяется выражением (1).

Плоская продольная волна осуществляет транспорт потенциальной  $P$  и кинетической энергий  $T$ , для которых:

$$\frac{dP}{dV} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \varepsilon_{xx}^2; \quad \frac{dT}{dV} = \frac{1}{2} \rho \dot{u}_x^2, \quad (5)$$

где  $\varepsilon_{xx}$  и  $u_{xx}$  - соответственно деформации и смещения вдоль оси  $OX$ , направленной перпендикулярно фронту волны. Учитывая, что  $c_1 \varepsilon_{xx} = \dot{u}_x$ , можно показать, что

$$\frac{dP}{dV} = \frac{dT}{dV}, \quad W = 2P, \quad (6)$$

где  $W$  - полная энергия объема  $dV$ .

При импульсном нагружении тонкой пластины в условии  $\lambda \gg d$  можно взять в качестве  $\lambda$  минимальную длину волны  $\lambda_{\min}$  в спектре Фурье нагружающего импульса. Если аппроксимировать импульс колоколообразной функцией:

$$\sigma(t) = \sigma_{01} \exp\left[-\beta^2(t - t_0)^2\right], \quad (7)$$

где  $\sigma_{01}$  – амплитуда,  $\beta$  – коэффициент затухания импульса,  $t_0$  – время нарастания импульса, и учесть только те гармонические составляющие, амплитуды которых не являются исчезающе малыми по сравнению с максимумом спектральной функции

$$\Phi(\omega) = \sigma_{01} \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4\beta^2}\right), \quad (8)$$

можно оценить величину максимальной частоты гармонических составляющих волнового пакета:  $\omega_{\max} \approx 4\beta$ . Тогда минимальная длина волны в спектре Фурье  $\lambda_{\min} = 2\pi c_{ln} / \omega_{\max} \approx c_{ln} t_0$ .

Условие  $c_{ln} t_0 \gg d$  является физически обоснованным ограничением на длительность импульса, выполнение которого обеспечивает справедливость приближения тонкостенного элемента. При этом формулы (1) – (6) остаются справедливыми для волнового пакета, поскольку предполагается отсутствие дисперсии и в силу принципа суперпозиции все силовые и энергетические параметры в этих соотношениях находятся суммированием по всем гармоническим составляющим нагружающего импульса.

Наличие у трехмерной конечной пластины свободных торцевых граней приводит к тому, что от них в центральную часть пластины в каждый момент времени приходят пары идентичных по амплитудным характеристикам продольных и поперечных волн разгрузки. Причем, если для одной из них волновой вектор  $\vec{k}$  составляет с осью  $OX$  угол  $\varphi = +\alpha$ , то для другой  $\varphi = -\alpha$ . В этих условиях суммарное касательное напряжение в центральной части пластины равно нулю и реализуется двухосное напряженное состояние. Этот вывод полностью согласуется с результатами численных расчетов.

Отличие образуемого напряженного состояния от поля напряжений в плоской продольной волне состоит в непостоянстве отношения  $\sigma_2 / \sigma_1$ , которое изменяется во времени вследствие влияния волн разгрузки от

свободных торцевых граней. Эту временную зависимость отношения  $\sigma_2 / \sigma_1$  необходимо учитывать при анализе экспериментальных данных.

## 2. Особенности НДС в области вершины трещины, нагружаемой импульсом растяжения.

Одной из основных характеристик НДС в области вершины трещины является коэффициент интенсивности напряжений (КИН), который в случае нормальной растягивающей нагрузки обозначается через  $K_I$ . Используя понятие КИН и известные асимптотические соотношения для компонентов тензора напряжений  $\sigma_{ij}(i, j = \overline{x, y})$  в непосредственной окрестности вершины трещины [2], выразим удельную плотность энергии  $dW_s / dV$  для случая статического нагружения в виде:

$$\frac{dW_s}{dV} = \frac{1+\nu}{2\pi E} \frac{1}{r} K_I^2 \Phi(\nu, \theta), \quad (9)$$

где

$$\Phi(\nu, \theta) = \cos^2 \frac{\theta}{2} \left\{ \frac{1-\nu}{1+\nu} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\}.$$

В случае произвольного динамического нагружения для любых значений частот плоских волн, входящих в волновой пакет нагружающего импульса, можно найти, согласно [3], достаточно малую окрестность вблизи вершины трещины  $r \ll \lambda_{\min}$ , где поле напряжений будет квазистатическим, и плотность упругой энергии определяется выражением (9). В то же время, благодаря конечности скорости распространения упругих волн, размеры ЗПН конечны. Следовательно, плотность энергии в ЗПН убывает от значения  $dW_s / dV$  в области вершины трещины до нуля на границе  $r = R$  по зависимости, определяемой скоростью нагружения  $\dot{\sigma}(t)$ , коэффициентом  $\nu$  и полярным углом  $\theta$ .

При динамическом нагружении величина  $dW / dV$  должна убывать с увеличением расстояния  $r$  быстрее, чем в статике. В то же время, показатель степени  $r$  не может превышать единицу, поскольку это приведет к расходимости интеграла, определяющего величину суммарной полной внутренней энергии в ЗПН. Поэтому в случае динамического нагружения предлагается записать выражение для величины  $dW / dV$  в следующем виде:

$$\frac{dW}{dV} = \frac{1+\nu}{2\pi E} K_I^2 \Phi(\nu, \theta) \frac{1}{\alpha r}. \quad (10)$$

Формирование напряженно-деформированного состояния

Функция  $\alpha = \alpha(\theta, \nu, r, \dot{\sigma})$  должна быть безразмерной и удовлетворять ряду условий:

- 1)  $\alpha > 1$ - условие более быстрого убывания  $dW/dV$  по сравнению с  $dW_s/dV$  ;
- 2)  $\alpha \rightarrow 1$  при  $r \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$  , исходя из принципа соответствия ;
- 3)  $\alpha \rightarrow \infty$  при  $r \rightarrow R$  , исходя из конечности размеров ЗПН.

В связи с этим функцию  $\alpha$  запишем в виде:

$$\frac{1}{\alpha} = 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{j(t, \dot{\sigma})}. \quad (11)$$

Введенная здесь безразмерная функция  $j(\dot{\sigma}, t)$  для удовлетворения условий 1) - 3) должна быть такой, чтобы  $\lim_{\dot{\sigma} \rightarrow \infty} j = 0$ ;  $\lim_{t \rightarrow \infty, \dot{\sigma} \rightarrow 0} j = \infty$ . В первом приближении можно задать

$$j = \frac{\sigma(t)}{\dot{\sigma} L_0 / (2c_R)} \cdot k, \quad (12)$$

где  $k$  - числовой коэффициент,  $\dot{\sigma}$  - эффективная скорость нагружения в интервале времени от 0 до  $t$  :

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{\sigma(t)} \int_0^t \dot{\sigma}^2(t) dt \approx \sum_i \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{\sigma(t)} \dot{\sigma}_i. \quad (13)$$

Отметим, что в случае линейно нарастающей нагрузки  $\dot{\sigma} = \ddot{\sigma}$  .

Выбранная в таком виде функция  $j$  имеет простой физический смысл коэффициента динамичности нагрузки. Нагружение является квазистатическим, если  $j \gg k$  , то есть величина нагрузки, которая может быть достигнута за характерное время системы  $\tau_0 = L_0 / (2c_R)$  при эффективной скорости нагружения, много меньше существующей в данный момент величины  $\sigma(t)$  . Чем ближе величина  $\dot{\sigma} \tau_0$  к значению  $\sigma(t)$  , тем в большей степени динамическим становится нагружение.

Теперь с учетом (9), получим выражение для величины энергии в ЗПН для случая линейно нарастающей нагрузки:

$$W = \frac{1+\nu}{2\pi E} \frac{j}{j+1} dK_I^2 c_2 t A, \quad (14)$$

где 
$$A = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(v, \theta) \mu(v, \theta) d\theta.$$

Заметим, что вычисление константы  $A$  с помощью приведенного интеграла возможно только при условии точного решения нестационарной динамической задачи о дифракции импульса растяжения на трещине конечной длины.

Величина энергии  $W$ , сконцентрированной в зоне повышенных напряжений к моменту времени  $t$  для случая линейно нарастающей нагрузки ( $\sigma(t) = \dot{\sigma} t$ ) определяется полученным в [1] выражением:

$$W = \begin{cases} \varphi(c_1, c_R, \dot{\sigma}) t^4, & t \leq \frac{L_0}{2c_R}, \\ \varphi(c_1, c_R, \dot{\sigma}) \left[ t^4 - \left( t - \frac{L_0}{2c_R} \right)^4 \right], & t > \frac{L_0}{2c_R}, \end{cases} \quad (15)$$

где 
$$\varphi(c_1, c_R, \dot{\sigma}) = \frac{1-v^2}{E} d c_1 c_R \dot{\sigma}^2.$$

Приравнивая (14) и (15) найдем значение  $K_I$ :

$$K_I = \left\{ \frac{\pi(1-v)}{3A} \frac{j+1}{j} \frac{c_1 c_R}{c_2} \right\}^{1/2} \dot{\sigma} \cdot \begin{cases} t^{3/2}, & t \leq \frac{L_0}{2c_R}, \\ \left[ \frac{1}{t} \left( t^4 - \left( t - \frac{L_0}{2c_R} \right)^4 \right) \right]^{1/2}, & t > \frac{L_0}{2c_R}. \end{cases} \quad (16)$$

Рассмотрим частный случай статического нагружения. Так как квазистатическим является нагружение при  $\dot{\sigma} = const$  (поскольку любое изменение скорости нагружения вызывает динамическое перераспределение напряжений в области вершины трещины), то статическое нагружение является предельным случаем квазистатического при  $\dot{\sigma} \rightarrow 0$ . Это означает, что время нагружения  $t \rightarrow \infty$ . При этом необходимо выполнение условия  $\lim_{\dot{\sigma} \rightarrow 0, t \rightarrow \infty} \sigma(t) = \sigma_S$ , где  $\sigma_S$  - статическое напряжение.

Проведя предельный переход к статике в выражении (16), получим:



$$\lim_{\sigma \rightarrow 0, t \rightarrow \infty, j \rightarrow \infty} K_I = \left\{ \pi \frac{\sqrt{1-\nu}}{A} \frac{2\sqrt{2}}{3} \right\}^{1/2} \sigma_s \sqrt{L_0}. \quad (17)$$

Однако в случае статического растяжения это выражение (17) должно принять вид:

$$K_{IS} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_s \sqrt{L_0}. \quad (18)$$

Поэтому сопоставление выражений (17) и (18) позволяет определить константу  $A$ :

$$A = \frac{4\sqrt{2}}{3} \sqrt{1-\nu}. \quad (19)$$

Справедливость выражений (12), (16)-(19) нуждается в экспериментальной проверке. При этом необходимо учитывать, что эксперимент проводится на образцах в виде пластин конечных размеров, при растяжении которых наряду с генерируемыми в них плоскими симметричными волнами расширения образуются также волны разгрузки от свободных поверхностей пластины, искажающие исходное напряженное состояние. Но, как указывалось выше в п.1, в центральной части конечной пластины касательные напряжения будут равны нулю и соотношение (2) остается справедливым, если под величиной  $\nu$  понимать некоторую функцию от времени  $\nu' = \nu(t)$ :  $\sigma_2 = \nu' \sigma_1$ .

Использование функции  $\nu'$  позволяет, не вдаваясь в чрезвычайно сложный анализ множественной интерференции волн разгрузки, путем внесения соответствующих изменений в соотношение (10), переписать выражение для энергии, поступающей в ЗПН, около достаточно малой, в сравнении с шириной образца, трещины:

$$W = \frac{1}{2E} c_1 d \int_0^{l_t} dl \int_0^{t_k} \sigma_{xx}^2 (1 + \nu'^2 - 2\nu\nu') dt, \quad (20)$$

где  $\sigma_{xx}$  - действующее нормально к берегам трещины напряжение в нагружающем импульсе.

Выражение для величины  $K_I$  в ограниченном образце, аналогичное (16), примет вид:

$$K_I = \left\{ \frac{\pi}{(1+\nu)A} \frac{j+1}{j} \frac{c_1}{c_2} \frac{1}{t} \int_0^{l_1} dl \int_0^{t_k} \sigma_{xx}^2 (1+\nu'^2 - 2\nu\nu') dt \right\}^{1/2}. \quad (21)$$

Необходимая для нахождения КИН подынтегральная функция  $\varepsilon(t) = \sigma_{xx}^2 (1+\nu'^2 - 2\nu\nu')$  определяется численно-экспериментальным методом.

### 3. Методика и результаты эксперимента.

Образцы для экспериментов изготавливались в виде прямоугольных пластин размером  $H=120$  мм,  $L=90$  мм,  $d=4$  мм. В середине пластин, параллельно короткой стороне выполнялся пропил длиной  $L_0 = 10$  мм с радиусом при вершине  $r_0 = 5$  мкм, имитирующий начальную трещину. Для изготовления образцов использовались оптически чувствительные материалы полиметилметакрилат (ПММА) и отвержденная эпоксидная смола (ЭД-20 МТГФА).

Равномерно распределенная импульсная нагрузка прикладывалась к коротким ( $L=90$  мм) сторонам образца по нормали к оси трещины с помощью двух типов нагрузочных устройств [4,5]. Их использование позволило осуществить импульсное растяжение пластины с трещиной либо за счет сил электромагнитного взаимодействия (при использовании для нагружения электрической энергии, запасенной в накопительных конденсаторах), либо за счет силы давления газов (при использовании энергии детонации взрывчатого вещества).

Высокоскоростная, бесконтактная и безынерционная регистрация полей напряжений в области вершины трещины в виде картин полос изохром выполнялась на поляризационно-динамической установке [6] с помощью камеры СФР-1М. В фиксированной точке образца  $(x_0, y_0)$  осуществлялась фотоэлектронная регистрация величины максимального касательного напряжения  $\tau_{\max}(t)$  в нагружающем импульсе.

Экспериментальная зависимость  $\tau_{\max}(x_0, y_0, t)$  использовалась в численном решении задачи о динамическом растяжении рассматриваемой пластины с центральной трещиной для определения величины нормального растягивающего напряжения  $\sigma_{xx}(x = \pm H/2, t)$ , действующего на торцевые поверхности пластины. В качестве нулевого приближения для численного расчета полагали:

$$\sigma_{xx}^0 \left( t, x = \pm H/2 \right) = \frac{2}{1-\nu} \tau_{\max} \left( t - \frac{x_0}{c_1} \right), \quad (22)$$

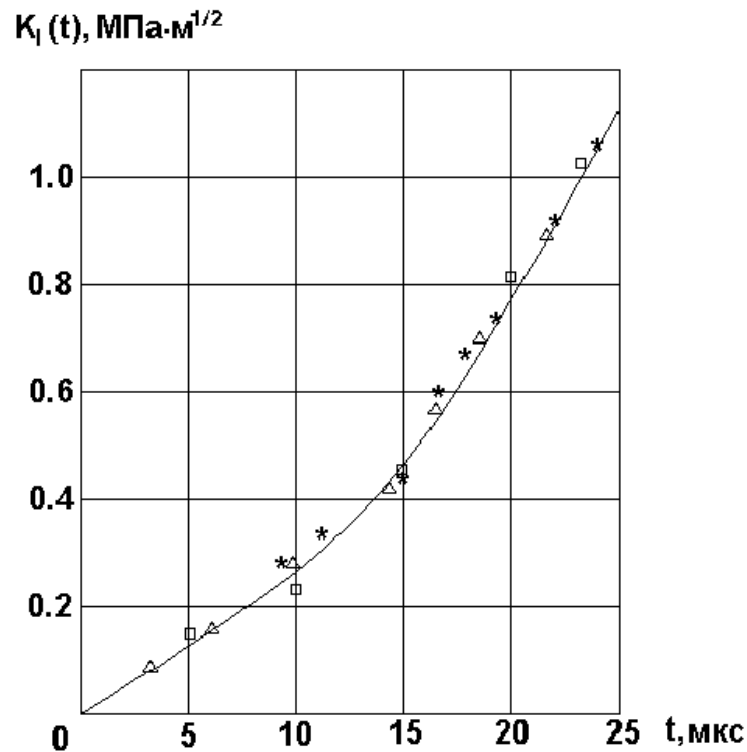


Рис. 3. Динамика роста коэффициента интенсивности напряжений при симметричном импульсном растяжении пластины с центральной трещиной. ( $\Delta$  – численный расчет, \* – данные эксперимента,  $\square$  – аналитический расчет).

что соответствует развитию в пластине исключительно системы плоских продольных волн расширения. После нахождения величины  $\sigma_{xx}(x = \pm H/2, t)$  моделировалось напряженно-деформированное состояние сплошного образца тех же размеров, нагруженного этим же импульсом растяжения. Полученные в численном расчете данные относительно однородного напряженного состояния в центральной части пластины позволили определить величины  $v'(t)$  и  $\sigma_{xx}(t)$ , необходимые для нахождения функции  $\varepsilon(t)$  и вычисления интеграла (21). Временные зависимости КИН, полученные экспериментальным путем из анализа картин полос изохром вблизи вершины трещины и вычисленные в соответствии с (21), приведены на рисунке 3.

Следующее из рисунка 3 соответствие теоретических и экспериментальных данных позволяет сделать вывод о достоверности предложенных представлений.

В заключение следует отметить, что развитый в настоящей работе подход к описанию процесса формирования НДС вблизи трещины позволяет:

- 1) получить компактные аналитические выражения, описывающие напряженно-деформированное состояние и энергетические потоки вблизи вершины стационарной трещины при произвольном импульсном нагружении;
- 2) с единых позиций подойти к описанию динамических и статических процессов хрупкого разрушения;
- 3) сформулировать количественный критерий различия между динамическим и квазистатическим нагружением стационарной трещины.

#### **Список использованной литературы.**

1. Шевляков Ю. А., Костандов Ю. А., Рыжаков А. Н. Динамическое растяжение тонкой пластины со стационарной центральной трещиной.// Динам. системы. 1998. Вып. 14. С. 131-142.
2. Партон В. З., Борисковский В. Г. Динамика хрупкого разрушения.- М.: Машиностроение, 1988.- 240 с.
3. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения.- М.: Наука, 1974.- 640 с.
4. Костандов Ю. А., Рыжаков А. Н., Федоркин С. И. Разрушение твердых полимеров при импульсном растяжении.// Проблемы прочности.- 1992.- №7.- С.14-17.
5. Костандов Ю. А., Рыжаков А. Н., Ульянов И. В. Способ инициирования трещины в плоских образцах.// Патент Украины №2015.- 1993.
6. Костандов Ю. А., Федоркин С. И., Скоблин А. А. Методика исследования процесса разрушения полимерных материалов при динамическом нагружении.// Заводская лаборатория.- 1986.- №9.-С.65-67.

Поступила в редколлегию 15.11.98