

УДК 532.59

И. Т. СЕЛЕЗОВ, д-р физ.-мат. наук, О. В. ЗВОНАРЕВА, асп.
Ин-т гидромех. НАН Украины

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ
ГИДРОУПРУГИХ ВОЛН В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ КУСОЧНО-
ПОСТОЯННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ С
ЖИДКОСТЬЮ**

Построено решение новой задачи распространения волн в полубесконечной цилиндрической оболочке со стыком, соединяющим две оболочки различных радиусов. Предполагается, что материал оболочки – вязкоупругий, жидкость – вязкая. Движение оболочек описывается теорией Кирхгофа - Лява, движения жидкости – уравнениями, осредненными по поперечному сечению. Задача решается преобразованием Лапласа по времени с последующим численным обращением. Проводится анализ численных результатов для давления и радиального перемещения оболочки при различных значениях параметров.

Исследуется распространение импульса давления в полубесконечной оболочке, заполненной жидкостью и состоящей из двух последовательно состыкованных оболочек разных радиусов. Движение оболочек описывается связанной системой уравнений теории вязкоупругих оболочек Кирхгофа-Лява, движение жидкости - осредненными по поперечному сечению уравнениями вязкой жидкости. К торцу системы прикладывается в начальный момент времени импульс давления, который распространяется вдоль системы, порождая на стыке отраженные и проходящие волны. Задача решается методом преобразования Лапласа по времени с последующим численным обращением. Ранее была рассмотрена аналогичная задача для бесконечной однородной оболочки [3], рассматриваемая здесь задача существенно усложняется. Применительно к стыку кровеносных сосудов в упрощенной гидравлической постановке задача со стыком двух полубесконечных цилиндрических оболочек с жидкостью, в которых учитывались только окружные напряжения, рассматривалась в [4], следуя работе [2].

Математическая постановка описанной выше задачи представляется в виде дифференциальные уравнения движения оболочек

$$\bar{L}_{1i}\bar{u}_{xi} + \bar{L}_{2i}\bar{u}_{ri} = -\frac{4k_{0i}}{\text{Re}}\bar{V}_i, \quad (1)$$

$$\bar{L}_{3i}\bar{u}_{xi} + \bar{L}_{4i}\bar{u}_{ri} = k_{0i}\bar{P}_i, \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

дифференциальные уравнения движения жидкости

$$\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial \tau} + R_{0i} \frac{\partial \bar{P}_i}{\partial x} = -\frac{8}{\text{Re}}\bar{V}_i, \quad (3)$$

$$a_i R_{0i} \frac{\partial \bar{P}_i}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x} + 2R_{0i} \frac{\partial \bar{u}_{ri}}{\partial \tau} = 0, \quad (4)$$

граничные условия на торце

$$\bar{P}_1(\bar{x}, \tau)|_{x=0} = f(\tau), \quad \bar{u}_{r1}(\bar{x}, \tau)|_{x=0} = 0, \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{u}_{x1}}{\partial \bar{x}} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \bar{u}_{r1}}{\partial \bar{x}^2} \right|_{x=0} = 0, \quad (6)$$

условия сопряжения на стыке оболочек

$$\bar{P}_1(\bar{x}, \tau)|_{\bar{x}=\bar{x}_0} = \bar{P}_2(\bar{x}, \tau)|_{\bar{x}=\bar{x}_0}, \quad \bar{V}_1(\bar{x}, \tau)|_{\bar{x}=\bar{x}_0} = \bar{V}_2(\bar{x}, \tau)|_{\bar{x}=\bar{x}_0}, \quad (7)$$

$$\bar{u}_{r1}(\bar{x}, \tau)|_{\bar{x}=\bar{x}_0} = \bar{u}_{r2}(\bar{x}, \tau)|_{\bar{x}=\bar{x}_0}, \quad \bar{u}_{x1}(\bar{x}, \tau)|_{\bar{x}=\bar{x}_0} = \bar{u}_{x2}(\bar{x}, \tau)|_{\bar{x}=\bar{x}_0}, \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{u}_{r1}}{\partial \bar{x}} \right|_{\bar{x}=\bar{x}_0} = \left. \frac{\partial \bar{u}_{r2}}{\partial \bar{x}} \right|_{\bar{x}=\bar{x}_0}, \quad \left. \frac{\partial \bar{u}_{x1}}{\partial \bar{x}} \right|_{\bar{x}=\bar{x}_0} = E_0 H_{02} \left. \frac{\partial \bar{u}_{x2}}{\partial \bar{x}} \right|_{\bar{x}=\bar{x}_0}, \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \bar{u}_{r1}}{\partial \bar{x}^2} \right|_{\bar{x}=\bar{x}_0} = E_0 H_{02}^3 \left. \frac{\partial^2 \bar{u}_{r2}}{\partial \bar{x}^2} \right|_{\bar{x}=\bar{x}_0}, \quad \left. \frac{\partial^3 \bar{u}_{r1}}{\partial \bar{x}^3} \right|_{\bar{x}=\bar{x}_0} = E_0 H_{02}^3 \left. \frac{\partial^3 \bar{u}_{r2}}{\partial \bar{x}^3} \right|_{\bar{x}=\bar{x}_0}, \quad (10)$$

условия на бесконечности

$$(\bar{V}_2, \bar{P}_2, \bar{u}_{r2}, \bar{u}_{x2}) \rightarrow 0 \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty \quad (11)$$

начальные условия

$$\bar{V}_i(\bar{x}, \tau)|_{\tau=0} = \bar{P}_i(\bar{x}, \tau)|_{\tau=0} = 0, \quad (12)$$

$$\bar{u}_{xi}(\bar{x}, \tau)|_{\tau=0} = \bar{u}_{ri}(\bar{x}, \tau)|_{\tau=0} = \frac{\partial \bar{u}_{xi}}{\partial \tau}|_{\tau=0} = \frac{\partial \bar{u}_{ri}}{\partial \tau}|_{\tau=0} = 0 \quad (13)$$

В (1) – (13) приняты обозначения

$$\bar{L}_{1i} = \left(1 + 2A_i \frac{\partial}{\partial r}\right) \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} - U_i^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}, \quad \bar{L}_{2i} = \bar{L}_{3i} = -\frac{1}{R_{0i}} \left(v_0 + B_i \frac{\partial}{\partial \tau}\right),$$

$$\bar{L}_{4i} = \left(1 + 2A_i \frac{\partial}{\partial r}\right) \left(\frac{1}{12} \frac{h_1^2}{R_1^2} H_{0i}^2 \frac{\partial^4}{\partial \bar{x}^4} + \frac{1}{R_{0i}^2}\right) + U_i^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2},$$

$$A_i = k_{2i}^* \frac{3\zeta_i + \eta_i}{3\zeta_i + 4\eta_i}, \quad e_i = k_{2i}^* \frac{3\zeta_i + 2\eta_i}{3\zeta_i + 4\eta_i},$$

$$a_i = \frac{\rho_i V_0^2}{k_{2i}^*}, \quad k_{2i}^* = 2\eta_i \frac{V_0}{R_1} \frac{1-v_0}{E_i}, \quad k_{0i} = \frac{\rho_0}{\rho_i} \frac{R_1}{h_i} U_i^2,$$

$$U_i = \frac{V_0}{c_{0i}}, \quad c_{0i}^2 = \frac{E_i}{\rho_0(1-v_0^2)}, \quad \bar{u}_{xi} = \frac{u_{xi}}{R_1},$$

$$\bar{u}_{ri} = \frac{u_{ri}}{R_1}, \quad \bar{P}_i = \frac{P_i}{\rho_0 V_0^2}, \quad \bar{V}_i = \frac{V_i}{V \rho_0}, \quad \bar{x} = \frac{x}{R_1},$$

$$\tau = \frac{V_0}{R_1} t, \quad R_{01} = 1, \quad R_{02} = \frac{R_2}{R_1}, \quad H_{01} = 1, H_{02} = \frac{h_2}{h_1},$$

$E_0 = \frac{E_2}{E_1}$, $\zeta_i = \frac{2}{3}\eta_i$, $\bar{x}_0 = 10$, Здесь Re - число Рейнольдса, V_0 - ха-

рактерная скорость течения, K_i – объемный модуль упругости, V_i – средняя скорость, определяемая зависимостью

$$\pi R_i^2 V_i = \int_0^{R_i} 2\pi r V_{xi} dr \quad (14)$$

Начально-краевая задача (1) - (13) решается методом преобразования Лапласа по времени τ [1], [5]. После некоторых преобразований для давления \bar{P}_i может быть получено следующее разрешающее уравнение:

$$n_{1i} \frac{d^8 P_i^L}{d\bar{x}^8} + n_{2i} \frac{d^6 P_i^L}{d\bar{x}^6} + n_{3i} \frac{d^4 P_i^L}{d\bar{x}^4} + n_{4i} \frac{d^2 P_i^L}{d\bar{x}^2} + n_{5i} P_i^L = 0, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} n_{1i} &= (1 + 2sA_i) \frac{h_1^2}{12R_1^2} mH_{0i}, \\ n_{2i} &= m(1 + 2sA_i) U_i^2 s^2 H_{0i} + \frac{a_i}{2} (1 + 2sA_i)^2 \frac{h_1^2}{12R_1^2} mH_{0i}, \\ n_{3i} &= \frac{a_i}{2} (1 + 2sA_i) U_i^2 s^2 H_{0i} + m \left(\frac{(v_0 + sB_i)^2}{R_{0i}^2} - \right. \\ &\quad \left. - (v_0 + sB_i) \left(\frac{1 + 2sA_i}{R_{0i}^2} + s^2 U_i^2 \right) \right) H_{0i}, \\ n_{4i} &= -\frac{a_i}{2} \left(\frac{(v_0 + sB_i)^2}{R_{0i}^2} - (1 + 2sA_i) \left(\frac{1 + 2sA_i}{R_{0i}^2} + s^2 U_i^2 \right) \right) + \\ &\quad + ms^2 U_i^2 \left(\frac{1 + 2sA_i}{R_{0i}^2} + s^2 U_i^2 \right) - k_{i0} \frac{1 + 2sA_i}{R_{0i} H_{0i}} + \frac{8ms^2 (v_0 + sB_i) k_{0i}}{H_{0i} \text{Re}}, \\ n_{5i} &= -\frac{s^2 U_i^2 k_{0i}}{R_{0i} H_{0i}} - \frac{a_i}{2} s^2 U_i^2 \left(\frac{1 + 2sA_i}{R_{0i}^2} + s^2 U_i^2 \right) \quad m = \frac{\text{Re}}{2s(s \text{Re} - 8)}, \end{aligned}$$

s - параметр преобразования Лапласа, индекс L обозначает изображение соответствующей величины.

Решение уравнения (15) в области ($0 \leq \bar{x} \leq x_0$) записывается в виде

Распространение гидроупругих волн

$$\begin{aligned}
 P_1^L(s, \bar{x}) = & e^{-k_1 \bar{x}} (A_1(s) \cos k_2 \bar{x} + A_2(s) \sin k_2 \bar{x}) + \\
 & + A_4(s) \sin k_4 \bar{x}) + e^{-k_1 \bar{x}} (A_5(s) \cos k_2 \bar{x} + A_6(s) \sin k_2 \bar{x}) + \\
 & + e^{-k_3 \bar{x}} (A_7(s) \cos k_4 \bar{x} + A_8(s) \sin k_4 \bar{x}).
 \end{aligned} \tag{16}$$

Учитывая условия убывания при $|\bar{x}| \rightarrow \infty$, решение (16) в области $\bar{x} \geq \bar{x}_0$ принимает вид:

$$\begin{aligned}
 P_2^L(s, \bar{x}) = & e^{-k_5 \bar{x}} (A_9(s) \cos k_6 \bar{x} + A_{10}(s) \sin k_6 \bar{x}) + \\
 & + e^{-k_7 \bar{x}} (A_{11}(s) \cos k_8 \bar{x} + A_{12}(s) \sin k_8 \bar{x})
 \end{aligned} \tag{17}$$

В решениях (16), (17) k_m ($m = 1, 2, 3, \dots, 8$) – корни характеристического уравнения, соответствующего дифференциальному уравнению (15). Скорости и перемещения определяются аналогично.

Подставляя решения в граничные условия (5), (6) и условия сопряжения (7) - (10) получим в области изображений систему уравнений для определения коэффициентов $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{12}$:

$$\sum_{j=1}^{12} A_j(s) e^{m_j \bar{x}} (a_{jn} \cos \lambda_n \bar{x} + b_{jn} \sin \lambda_n \bar{x}) = f_n(s), \tag{18}$$

где первые четыре уравнения ($n = 1, 2, 3, 4$) определяются при $\bar{x} = 0$, а остальные ($n = 5, 6, \dots, 12$) определяются в стыке при $\bar{x} = \bar{x}_0$.

В дальнейшем численные решения были получены для импульса, соответствующего реальному изменению пульсового давления сердца [3]

$$\bar{P}_1(\bar{x}, \tau) \Big|_{\bar{x}=0} = \bar{A} \tau^2 e^{-\alpha \tau}, \tag{19}$$

где $\bar{A} = 2,432 \cdot 10^{-4}$, $\alpha = 0,015$.

Численное обращение преобразования Лапласа проводилось на основе рядов Фурье по синусам [1,5] при следующих параметрах:

$$A_1 = A_2 = 4,073, \quad B_1 = B_2 = 5,431, \quad \text{Re} = 2340, \quad U_1 = U_2 = 0,02191,$$

$$k_{01} = k_{02} = 0,6, \quad a_1 = a_2 = 0,2178 \cdot 10^{-4}, \quad k_{21}^* = k_{22}^* = 8,1449, \quad E_0 = 1.$$

Некоторые результаты расчетов представлены на рис. 1,2, которые показывают изменение давления $\bar{P} = (P/\rho_0)V_0^2$ и радиального перемещения $\bar{u}_r = u_r/R_1$ в сечении $\bar{x} = \bar{x}_0$ в зависимости от времени τ , для различных форм стыка.

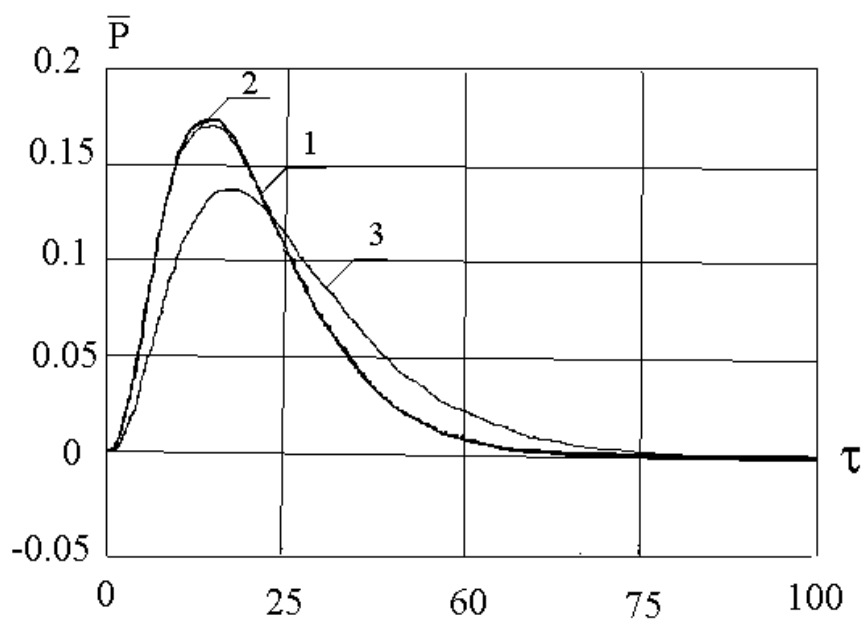


Рис.1.

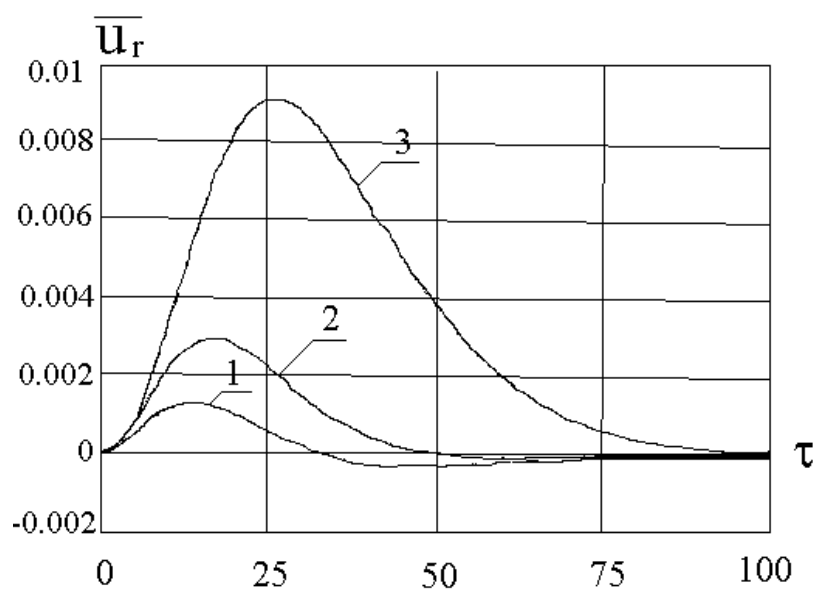


Рис.2.

На рис. 1,2, кривые 1 соответствуют гладкой оболочке, когда значения радиусов совпадают ($R_1 = R_2$). Кривые 2 соответствуют оболочке со стыком, когда $R_1 > R_2$, кривые 3 – когда $R_1 < R_2$. Из рис. 1 видно, что изменение давления по сравнению с гладкой оболочкой значительно проявляется в стыке при $R_1 < R_2$, ($R_2/R_1 = 1,1$) и мало проявляется при $R_1 > R_2$, $R_2/R_1 = 0,9$. Изменения величин прогибов показаны на рис. 2. Кривая 1 соответствует гладкой оболочке $R_2/R_1 = 1$, кривая 2 - кусочно-постоянной для $R_2/R_1 = 0,9$, а кривая 3 - для $R_2/R_1 = 1,1$.

Список использованной литературы

1. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М. 1965.- 288 с.
2. Каро К., Педли Т., Шротер Р., Сид У. Механика кровообращения. М., 1981. 624 с.
3. Селезов И. Т., Звонарева О. В. Распространение импульса в упругой цилиндрической оболочке, заполненной вязкой жидкостью.// Динамические системы. 1998. вып. 14, с. 87-94.
4. Селезов И. Т., Каплун Ю.М. Влияние сужения кровеносного сосуда на распространение пульсового давления крови // Бионика. 1991. №24. С.50-54.
5. Selezov I.T. Numerical Laplace transform inversion for solving initial boundary value problems of mechanics. //The 3rd Int. Congress on Industrial and Appl. Math. Hamburg, Germany. 3-7 July 1995. P. 435.

Поступила в редколлегию 10.02.99