УДК 517.36

С. К. ПЕРСИДСКИЙ, д-р физ.–мат. наук, Симферопольский гос. ун-т

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ ЗНАКООПРЕДЕЛЕННОСТИ КВАДРАТИЧНЫХ И КВАЗИКВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ В КОНУСЕ

В работе приведен новый критерий знакоопределенности к конусе пространства $\Re^n$ квадратичных и квазиквадратичных форм. Доказательство основных результатов приведено для неотрицательно конуса $K_+^n : x \geq 0, x \in \Re^n$. Случай произвольного октанта пространства $\Re^n$ сводится к K_+^n путем некоторой замены переменных [1].

За последние тридцать лет опубликовано значительное число работ, относящихся к вопросам исследования знакоопределенности квадратичных форм в конусе, например работы [2-5], однако приведенные в них критерии знакоопределенности в K_+^n не достаточно конструктивны при большой размерности конуса. В частности критерии Искандера-Заде [2] и С. А. Житникова [3], трудно реализовать уже в случае трех переменных.

Приведенный в настоящей статье подход к решению указанных выше задач позволяет свести вопрос о знакоопределенности квадратичных форм в конусе к использованию модифицированного критерия Сильвестра для случая, когда некоторые элементы матрицы A умножаются на один и тот же параметр λ и реализация соответствующего критерия не вызывает серьезных затруднений при решении задач большой размерности.

Квазиквадратичные формы исследуются аналогично; заметим, что это понятие было впервые введено в рассмотрение в нашей работе [1].

Пусть $V(x) = x^T Ax$ - квадратичная форма, где $x \in \Re^n$, A - вещественная симметричная постоянная матрица размерности $n \times n$ с элементами $a_{sk}\,(s, k = \overline{1,n})$. Если для некоторой квадратичной формы $U(x) = x^T A_1 x$ в конусе K_+^n выполняется неравенство

$$x^T Ax \geq x^T A_1 x, \tag{1}$$

то матрицу A_1 будем называть "оценочной" матрицей для матрицы A_0.

Теорема 1. *Для того, чтобы квадратичная форма $V(x) = x^T Ax$ была функцией положительной знакоопределенной в конусе K_+^n, необ-*

ходимо и достаточно существование для матрицы A оценочной матрицы A_1, положительной знакоопределенной в пространстве $\Re^n$.

Достаточность условий теоремы очевидна.

Необходимость, очевидно, также будет иметь место в случае, когда сама матрица A удовлетворяет условию Сильвестра. В этом случае можно положить $A = A_1$. Пусть $V(x)$ является функцией положительной знакоопределенной только в K_+^n.

Положим

$$l = \min_{\|x\|=1,\, x\in K_+^n} x^T A x \tag{2}$$

где $l > 0$. Ясно, что в этом случае всегда найдется положительная знакоопределенная матрица A_1, наибольшее собственное значение которой $\mu \le l$. Но тогда при $\|x\| = 1$ получим

$$\max_{\|x\|=1} x^T A_1 x = \mu \le l = \min_{\|x\|=1,\, x\in K_+^n} x^T A x, \tag{3}$$

что и доказывает необходимость условий теоремы.

Таким образом, вопрос исследования знакоопределенности в конусе K_+^n квадратичной формы $x^T A x$ сводится к построению соответствующей оценочной матрицы A_1 и проверке выполнения для нее условий Сильвестра.

В дальнейшем будем предполагать, что все диагональные элементы обоих матриц совпадают и что они положительны.

Для построения оценочной матрицы A_1 умножим все положительные недиагональные элементы $a_{sk}\,(s \ne k)$ на параметр $\lambda \le 1$. Полученная матрица $A_1(\lambda)$, очевидно, будет оценочной для A.

Далее рассмотрим несколько возможных случаев.

1. Если все недиагональные элементы матрицы A неотрицательны, можно положить $\lambda = 0$ и при этом оценочная матрица $A_1(0) > 0$ в $\Re^n$, следовательно, в этом случае $x^T A x > 0$ в K_+^n.

2. Если все недиагональные элементы матрицы A не положительны, то форма $x^T A x > 0$ в K_+^n лишь в случае [3], когда матрица A удовлетворяет критерию положительной определенности Сильвестра.

Таким образом, нам остается рассмотреть случай, когда среди недиагональных элементов матрицы A есть как положительные, так и отрицательные числа. Тогда строим оценочную матрицу $A_1(\lambda)$ и проверяем для нее выполнение соответствующих условий Сильвестра.

Главные диагональные миноры матрицы $A(\lambda)$, $(\lambda \le 1)$ обозначим через $\Delta_1, \Delta_2(\lambda), \ldots, \Delta_n(\lambda) = \det A(\lambda)$. Нетрудно видеть, что Δ_1 - многочлен нулевой степени от λ, $\Delta_2(\lambda) = P_2(\lambda)$ - многочлен нулевой или второй степени, а при $k > 2$ $\Delta_k(\lambda) = P_k(\lambda)$ – многочлен степени не выше k.

Положим σ_1: $\lambda \le 1$, обозначим через σ_2 множество на котором $P_2(\lambda) > 0$, … , через σ_n обозначим множество на котором $P_n(\lambda) > 0$. Если эти множества не пусты и их пересечение $\sigma = \bigcap\limits_{k=1}^{n} \sigma_k \ne \varnothing$, то при любом значении $\lambda = \overline{\lambda} \in \sigma$ оценочная матрица $A(\overline{\lambda}) > 0$ в $\mathfrak{R}^n$ и исследуемая квадратичная форма будет функцией положительной знакоопределенной в конусе K_+^n.

В качестве примера рассмотрим квадратичную форму

$$V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

В этом случае оценочная матрица имеет вид:

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ \lambda & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

σ_1: $\lambda \le 1$; σ_2: $|\lambda| < 1$; σ_3: $-0{,}1937129 < \lambda < 0{,}8603795$. При этом $\sigma = \sigma_3$, таким образом при любом значении $\lambda \in \sigma_3$ $A(\lambda) > 0$ в пространстве $\mathfrak{R}^3$ и исследуемая квадратичная форма будет определенно-положительной в K_+^3; в частности при $\lambda = 0$ $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2(0) = 1$, $\Delta_3(0) = 1$.

Рассмотрим далее квазиквадратичную форму

$$V(x) = \sum_{s,k=1}^{n} a_{sk} \varphi_s(x_s) \varphi_k(x_k) \qquad (a_{sk} = a_{ks}), \tag{4}$$

где $\varphi_s(x_s) x_s > 0$ при $x_s \ne 0$ и непрерывны.

Если положить $\varphi_s(x_s) = y_s (s = \overline{1, n})$, то придем к квадратичной форме

$$U(y) = \sum_{s,k=1}^{n} a_{sk} y_s y_k = y^T A y, \text{ где } y \in \mathfrak{R}_y^n \tag{5}$$

Теорема 2. *Если для матрицы A найдется знакоопределенная положительная оценочная матрица A_1, то квазиквадратичная форма* (4) *будет знакоопределенной положительной функцией в конусе $K_+^n \subset \mathfrak{R}_x^n$.*

Действительно, если матрица $A_1 > 0$ в $\mathfrak{R}_y^n$, то квадратичная форма $U(y)$ будет положительной знакоопределенной в конусе K_+^n пространства $\mathfrak{R}_y^n$. Нетрудно видеть, что при этом в конусе $K_+^n \subset \mathfrak{R}_x^n$ положительной знакоопределенной будет и квазиквадратичная форма (4).

Рассмотрим квазиквадратичную форму $V(x)$ вида (4) в предположении, что все функции $\varphi_s(x_s)$ удовлетворяют неравенствам $\varphi_s(x_s) > 0$ при $x_s \neq 0$ $\left(s = \overline{1,n}\right)$. В этом случае будем называть рассматриваемую функцию $V(x)$ квазиквадратичной формой второго типа.

Нетрудно видеть, что имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Квазиквадратичная форма второго типа будет положительной знакоопределенной в $\mathfrak{R}_x^n$, тогда и только тогда, когда квадратичная форма $W(z) = \sum\limits_{s,k=1}^{n} a_{sk} z_s z_k$ $(a_{sk} = a_{ks})$ будет функцией положительной знакоопределенной в неотрицательном конусе K_+^n: $z_s \geq 0$ $\left(s = \overline{1,n}\right)$.*

Проиллюстрируем Теорему 3 рассмотрением следующего примера.

Исследуем устойчивость системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1^3\left(x_1^4 + x_2^2 - x_3^6\right) \\ x_2' &= -x_2\left(x_1^4 + x_2^6 - 2x_3^6\right) \\ x_3' &= -x_3^5\left(26x_3^6 - x_1^4 - 8x_2^2\right) \end{aligned} \tag{6}$$

Положим $V = \dfrac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)$, тогда в силу этой системы $V'_{(6)} = -U(x_1, x_2, x_3)$, где функция U будет квазиквадратной формой второго типа следующего вида:

$$U(x_1, x_2, x_3) = (x_1^4, x_2^2, x_3^6) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -5 \\ -1 & -5 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^4 \\ x_2^2 \\ x_3^6 \end{pmatrix}$$

Эта функция будет положительной знакоопределенной в $\Re_x^3$ если квадратичная форма

$$W(z_1, z_2, z_3) = (z_1, z_2, z_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -5 \\ -1 & -5 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1, \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

будет положительной знакоопределенной в конусе K_+^3: $z_1 \geq 0$, $z_2 \geq 0$, $z_3 \geq 0$.

Для матрицы A квадратичной формы W оценочной является матрица

$$A_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ \lambda & 1 & -5 \\ -1 & -5 & 26 \end{pmatrix}, \text{ где } \lambda \leq 1.$$

Нетрудно видеть, что матрица $A(\lambda)$ будет удовлетворять критерию Сильвестра если $\lambda \in (0, 5/13)$. Следовательно, $V'_{(6)} = -U(x_1, x_2, x_3)$ будет функцией отрицательной знакоопределенной в пространстве

$\mathfrak{R}_x^3$ и нулевое решение системы (6) асимптотически устойчиво в целом.

Список использованной литературы

1. Персидский С. К. О знакоопределенности однородных многочленов. Динамические системы вып. 14. Издательство "Таврия" 1998 г. С. 29–35.
2. Искандер-Заде З. А. Монотонная устойчивость движения в случае нейтрального линейного приближения. Ж. Вычислит. матем. и матем. физика. – 1966, т. 6, № 3. – С. 454-465.
3. Житников С. А. К вопросу об устойчивости сложных систем. Математика, № 7 (230). – Казань, 1981.
4. Персидский С. К. Исследование вторым методом Ляпунова знакоопределенности в конусе форм второй и третьей степени. Межведомств. сборник "Динамические системы" № 13. – Киев: "Либідь", 1994. – С. 3-6.
5. Рапопорт Л. Б. Устойчивость по Ляпунову и знакоопределенность квадратичных форм в конусе. ППМ, т. 50, вып. 4. 1986. - С. 674-679.

Поступила в редколлегию 10.04.99