УДК 532.135

Д. С. МИРОШНИЧЕНКО, асп. Киевский ун-т им. Т. Г. Шевченко

АНИЗОТРОПНАЯ ЖИДКОСТЬ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Проведена классификация жидкостей в соответствии с терминологией школы рациональной механики. Построены реологические уравнения состояния анизотропной жидкости второго порядка. Сделано качественное предположение относительно реологического поведения разбавленной суспензии жестких эллипсоидов вращения при моделировании ее дисперсионной среды жидкостью второго порядка.

При сравнении двух состояний сплошной среды, текущего с метрическим тензором g_{ij} в момент времени t и последующего с метрическим тензором $\hat{g}_{ij}$ в момент времени $t+\Delta t$, вводится тензор деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{ij} - g_{ij}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{x}_m}{\partial x_i}\frac{\partial \hat{x}_n}{\partial x_j} g_{mn} - g_{ij}\right), \quad (1)$$

который запишется через компоненты вектора перемещения w_i в виде

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(w_{i,j} + w_{j,i} + w_{m,i} w_{m,j}\right) \quad (2)$$

Тензор деформаций играет основную и определяющую роль в теории деформирования твердых тел. В гидродинамике и в реологии сами деформации несущественны, однако существенно, насколько быстро они происходят. Поэтому, представляя компоненты вектора перемещений w_i следующим образом

$$w_i = w_i^{(1)}\Delta t + w_i^{(2)}\frac{\Delta t^2}{2} + \ldots + w_i^{(n)}\frac{\Delta t^n}{n!} + o(\Delta t^n), \quad \Delta t \to 0, \quad (3)$$

где $w_i^{(1)} = v_i$ – скорость, $w_i^{(2)} = a_i$ – ускорение, введем в рассмотрение тензоры скоростей деформаций n-ого порядка

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(1)}\Delta t + \varepsilon_{ij}^{(2)}\frac{\Delta t^2}{2} + \ldots + \varepsilon_{ij}^{(n)}\frac{\Delta t^n}{n!} + o(\Delta t^n), \quad \Delta t \to 0, \quad (4)$$

в частности $\varepsilon_{ij}^{(1)} = d_{ij}$ – тензор скоростей деформаций и $\varepsilon_{ij}^{(2)} = b_{ij}$ – тензор ускорений деформаций, которые имеют вид

$$d_{ij} = \frac{1}{2}\left(v_{i,j} + v_{j,i}\right), \tag{5}$$

$$b_{i,j} = \frac{1}{2}\left(a_{i,j} + a_{j,i} + 2v_{mi}v_{mi}\right), \tag{6}$$

а тензоры скоростей деформаций высших порядков равняются

$$\varepsilon_{ij}^{(n)} = \frac{1}{2}\left(w_{i,j}^{(n)} + w_{j,i}^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k w_{m,i}^{(k)} w_{m,j}^{(n-k)}\right), \tag{7}$$

$$\varepsilon_{ij}^{(n+1)} = \frac{d}{d\,t}\varepsilon_{ij}^{(n)} + \varepsilon_{ik}^{(n)} v_{k,j} + \varepsilon_{jk}^{(n)} v_{k,j} \tag{8}$$

Удвоенные тензоры (7), (8) носят название тензоров Ривлина-Эриксена [8].

Основной задачей реологии является построение реологических уравнений состояния рассматриваемых сред. Вводя изотропное давление p, представим реологическое уравнение состояния в виде

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + f_{ij} \tag{9}$$

Следуя терминологии школы рациональной механики [2], если

$$f_{ij} = f_{ij}\left(\varepsilon_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(1)}, \ldots, \varepsilon_{ij}^{(n)}\right), \tag{10}$$

где f_{ij} задает общую зависимость, удовлетворяющую принцип объективности Нолла [7], то уравнение состояния (9) описывает реологическое поведение жидкости Ривлина-Эриксена сложности n. Если же (10) задает полиномиальную зависимость, которая по отношению к тензору скоростей деформаций наивысшего порядка $\varepsilon_{ij}^{(n)}$ является линейной, а на любое произведение $\varepsilon_{im}^{(k_1)}\varepsilon_{mr}^{(k_2)}\ldots\varepsilon_{sj}^{(k_m)}$ налагается условие $k_1 + k_2 + \ldots + k_m \le n$, тогда уравнение состояния (9) описывает реологическое поведение жидкости Ривлина-Эриксена n-ого порядка.

Заметим, что идеальная жидкость – это жидкость нулевого порядка. Реологическое уравнение состояния наиболее простой модели – вязкой ньютоновской несжимаемой жидкости имеет вид

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu d_{ij}, \tag{11}$$

где μ – динамический коэффициент вязкости. Здесь учитывается только линейная зависимость тензора напряжений от тензора скоростей деформаций, поэтому это уравнение состояния описывает реологическое поведение жидкости первого порядка. Отыскивая общую такую зависимость, используем из алгебры теорему Гамильтона-Кели

$$d_{i,k}d_{k,m}d_{mk} - I_1 d_{i,k}d_{k,j} + I_2 d_{i,j} - I_3 = 0,$$

где I_1, I_2, I_3 – инварианты тензора скоростей деформаций, и получим реологическое уравнение состояния жидкости Рейнера-Ривлина

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu d_{ij} + 4\mu_2 d_{ik}d_{kj}, \tag{12}$$

где p, μ, μ_2 – произвольные функции инвариантов I_1, I_2, I_3 тензора скоростей деформаций. Такое реологическое уравнение состояния отвечает жидкости сложности 1.

Хотя (12) и учитывает общую зависимость тензора напряжений от тензора скоростей деформаций, но не описывает реологическое поведение жидкости, которая проявляет эффект нормальных напряжений, так называемый эффект Вайсенберга [10], когда среда имеет упругие свойства.

За упругие свойства жидкости отвечает тензор ускорений деформаций b_{ij}, а общая зависимость тензора напряжений $\mathbf{T}$ от тензоров скоростей и ускорений деформаций $\mathbf{d}$ и $\mathbf{b}$ имеет вид

$$\begin{aligned}\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \alpha_1\mathbf{d} + \alpha_2\mathbf{b} + \alpha_3\mathbf{d}^2 + \alpha_4\mathbf{b}^2 + \alpha_5(\mathbf{db} + \mathbf{bd}) +\\ + \alpha_6(\mathbf{d}^2\mathbf{b} + \mathbf{bd}^2) + \alpha_7(\mathbf{db}^2 + \mathbf{b}^2\mathbf{d}) + \alpha_8(\mathbf{d}^2\mathbf{b}^2 + \mathbf{b}^2\mathbf{d}^2),\end{aligned} \tag{13}$$

где p, α_i (i=1,2,…,8) – произвольные функции инвариантов тензоров $\mathbf{d}$ и $\mathbf{b}$. Уравнение (13) описывает реологическое поведение жидкости сложности 2. Реологическое уравнение состояния жидкости второго порядка имеет вид

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu d_{ij} + 2\mu_1 b_{ij} + 4\mu_2 d_{ik}d_{kj} \tag{14}$$

Можно также построить реологические уравнения состояния жидкости сложности n или n-ого порядка при n>2. Однако даже для жидкости сложности 2, как это можно судить по примеру соотношения (13) с его восемью реологическими постоянными (функциями), будут возникать большие математические трудности. Если еще больше специализировать вид определяющих соотношений, то мы рискуем потерять само явление, которое хотим изучать.

В общей теории вискозиметрии рассматривается простое сдвиговое течение

$$u = 0,\ v = Kx,\ w = 0,\ K = const \tag{15}$$

и измеряются напряжение сдвига и разности нормальных напряжений

$$T_{yx} = \tau(K), \quad T_{xx} - T_{zz} = S_1(K), \quad T_{yy} - T_{zz} = S_2(K). \tag{16}$$

Таким образом, мы имеем возможность определить только три реологических постоянных в процессе эксперимента. Рассмотрев (14) в простом сдвиговом течении (15), определим

$$\mu = \frac{\tau(K)}{K}, \quad \mu_1 = \frac{S_1(K) - S_2(K)}{2K^2}, \quad \mu_2 = \frac{S_2(K)}{K^2}. \tag{17}$$

Заметим, что в простом сдвиговом течении все тензоры скоростей деформаций порядка, высшего 2, равняются нулю. А поэтому в простом сдвиговом течении жидкость сложности n или n-ого порядка ведет себя как жидкость второго порядка (14), которая носит название жидкости Ривлина-Эриксена. Реологические постоянные μ_1, μ_2 называются коэффициентами разности нормальных напряжений. За нелинейность отвечает тензор $d_{ik}d_{kj}$, а b_{ij} – за упругие свойства жидкости.

Запишем уравнение состояния анизотропной жидкости Эриксена [5–6]

$$\begin{aligned} t_{ij} = {} & (\alpha_0 + \alpha_1 d_{km} n_k n_m)\delta_{ij} + \alpha_2 n_i n_j + \alpha_3 d_{ij} + \alpha_4 d_{km} n_k n_m n_i n_j + \\ & + \alpha_5 d_{ik} n_k n_j + \alpha_6 d_{jk} n_k n_i + \alpha_7 n_i N_j + \alpha_8 n_j N_i \end{aligned} \tag{18}$$

где n_i – компонента вектора ориентации, N_i – инвариантная производная вектора ориентации по времени, α_i – реологические постоянные; и уравнение ориентации [6]

$$N_i = \dot{n}_i - \omega_{ij} n_j = \lambda(d_{ik} n_k - d_{km} n_k n_m n_i) \tag{19}$$

где ω_{ij} – тензор вихря, λ – реологическая постоянная.

Уравнения (18), (19) описывают реологическое поведение анизотропной жидкости первого порядка – при их построении в уравнениях состояния специально учитывали только линейный вклад тензора скоростей деформаций d_{ij}.

Построим анизотропную жидкость второго порядка, учитывая общую зависимость от тензора скоростей деформаций d_{ij} и линейную от тензора ускорения деформаций b_{ij}, то есть

$$f_{ij} = f_{ij}\left(n_k, N_k, d_{km}, d_{kr}d_{rm}, b_{km}\right), \tag{20}$$

$$N_i = \dot{n}_i - \omega_{ij}n_j = g_i\left(n_k, d_{km}, d_{kr}d_{rm}, b_{km}\right) \tag{21}$$

Зависимости (20), (21) удовлетворяют принцип объективности реологического поведения материала [7], то есть функции f_{ij}, g_i являются инвариантными относительно выбора системы координат. Неинвариантные величины $\dot{n}_k$, $v_{k,m}$, $a_{k,m}$ заменены на инвариантные N_k, d_{km}, b_{km}. Основываясь на [5, 6, 9], выпишем построенные уравнения состояния анизотропной жидкости второго порядка

$$\begin{aligned} t_{ij} = {} & p\delta_{ij} + \alpha_2 n_i n_j + \alpha_3 d_{ij} + \alpha_4 d_{km} n_k n_m n_i n_j + \alpha_5 d_{ik} n_k n_j + \alpha_6 d_{jk} n_k n_i + \\ & + \alpha_7 n_i N_j + \alpha_8 n_j N_i + \beta_3 b_{ij} + \beta_4 b_{km} n_k n_m n_i n_j + \beta_5 b_{ik} n_k n_j + \beta_6 b_{jk} n_k n_i + \\ & + \gamma_3 d_{ik} d_{kj} + \gamma_4 d_{kr} d_{rm} n_k n_m n_i n_j + \gamma_5 d_{im} d_{mk} n_k n_j + \gamma_6 d_{jm} d_{mk} n_k n_i, \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} N_i = \dot{n}_i - \omega_{ij} n_j = {} & \lambda\left(d_{ik} n_k - d_{km} n_k n_m n_i\right) + \\ & + \lambda_1 (b_{ik} n_k - b_{km} n_k n_m n_i) + \lambda_2 (d_{im} d_{mk} n_k - d_{kr} d_{rm} n_k n_m n_i), \end{aligned} \tag{23}$$

где в (22) уже положено согласно с (9)

$$\alpha_0 + (\alpha_1 d_{km} + \beta_1 b_{km} + \gamma_1 d_{kr} d_{rm})\, n_k n_m = -p\,.$$

Заметим, что при $\beta_i = 0$, $\lambda_1 = 0$ уравнения (22), (23) описывают реологическое поведение анизотропной жидкости сложности 1.

Рассмотрим течение дисперсионной среды, которая имеет упругие свойства, то есть будем моделировать ее жидкостью (Ривлина-Эриксена) второго порядка (14). При обтекании эллипсоида вращения получим в приближении Стокса нелинейные уравнения движения. Однако задачу можно линеаризовать, разлагая функцию тока в ряд по степеням малых безразмерных параметров $\varepsilon_1 = (\mu_1/\mu)K \ll 1$, $\varepsilon_2 = (\mu_2/\mu)K \ll 1$:

$$\psi = \psi_0 + \varepsilon_1 \psi_1^{(1)} + \varepsilon_2 \psi_1^{(2)} + \ldots \tag{24}$$

как это проделано в [3]. Хотя полученные уравнения уже будут линейными, математическая задача остается достаточно сложной. Затем с помощью динамического метода Ландау [1] можно определить реологические постоянные уравнения состояния структурного континуума, за которое принимается уравнение состояния анизотропной жидкости второго порядка (22), (23). Наконец, если затем провести осреднение уравнения состояния (22) с помощью функции распределения угловых положений оси симметрии эллипсоидальной частицы [4], то получим реологическое уравнение состояния суспензии.

В простом сдвиговом течении (15) напряжение сдвига и разности нормальных напряжений в суспензии имеют вид

$$\begin{gathered} T_{yx} = \mu K\left[1+\nu(\sigma,p)\phi\right], \\ T_{xx}-T_{yy} = \mu K\left[S_1(\sigma,p)-S_2(\sigma,p)\right]\phi + 2\mu_1 K^2\left[1+\nu_1'(\sigma,p)\phi\right], \\ T_{yy}-T_{zz} = \mu K S_2(\sigma,p)\phi + \mu_2 K^2\left[1+\nu_2'(\sigma,p)\phi\right] \end{gathered} \tag{25}$$

И на основании (16), (17), (25) можно определить эффективные коэффициенты вязкости суспензии $\mu_{эф}, \mu_{1эф}, \mu_{2эф}$

$$\mu_{эф} = \mu\left[1+\nu(\sigma,p)\phi\right],\ \mu_{1эф} = \mu_1\left[1+\nu_1(\sigma,p)\phi\right],\ \mu_{2эф} = \mu_2\left[1+\nu_2(\sigma,p)\phi\right], \tag{26}$$

где инкременты $\nu_1(\sigma,p), \nu_2(\sigma,p)$ запишутся в виде

$$\nu_1(\sigma,p) = \frac{\left[S_1(\sigma,p)-S_2(\sigma,p)\right]}{2\varepsilon_1} + \nu_1'(\sigma,p),\ \ \nu_2(\sigma,p) = \frac{S_2(\sigma,p)}{2\varepsilon_2} + \nu_2'(\sigma,p). \tag{27}$$

При $p=1$ имеем суспензию жестких сферических частиц [3], в этом случае инкременты эффективных вязкостей суспензии равняются

$$\nu(\sigma,p) = 2.5,\quad S_1, S_2 = 0,\quad \nu_1'(\sigma,p) = 3\frac{3}{28} > 0,\ \ \nu_1'(\sigma,p) = 2\frac{19}{28} > 0. \tag{28}$$

В нулевом приближении дисперсионная среда – жидкость первого порядка (11), и, учитывая из [4], что $\mu_1 < 0\,(\varepsilon_1 < 0)$, $S_1 < 0, S_2 > 0$, соответствующие части инкрементов эффективных коэффициентов разностей нормальных напряжений суспензии при $p \neq 1$ будут

$$\frac{\left[S_1(\sigma,p)-S_2(\sigma,p)\right]}{2\varepsilon_1} > 0,\ \ \frac{S_2(\sigma,p)}{2\varepsilon_2} > 0. \tag{29}$$

Основываясь на [3, 4] и на предельном случае (28), можно сделать качественное предположение, что при $p \neq 1$ части инкрементов эффективных коэффициентов разностей нормальных напряжений суспензии будут положительными

$$\nu_1'(\sigma, p) > 0, \nu_1'(\sigma, p) > 0,$$

то есть полные инкременты эффективных вязкостей суспензии жестких эллипсоидов вращения будут также положительными

$$\nu(\sigma, p) > 2.5,\ \nu_1(\sigma, p) > 0,\ \nu_2(\sigma, p) > 0. \tag{30}$$

Таким образом, согласно проведенной классификации жидкостей в статье построены реологические уравнения состояния анизотропной жидкости второго порядка. Разбавленная суспензия жестких эллипсоидов вращения в несжимаемой ньютоновской жидкости проявляет неньютоновские свойства [4]. Сделано качественное предположение относительно реологического поведения разбавленной суспензии жестких эллипсоидов вращения в жидкости второго порядка (14), принимая построенные уравнения состояния анизотропной жидкости того же порядка (22), (23) за реологические уравнения состояния структурного континуума и ориентации взвешенной частицы. Как и в случае разбавленной суспензии жестких сферических частиц [3] эффективные вязкости увеличиваются, но в отличие от такой дисперсной фазы в случае асимметричных частиц неньютоновские свойства усиливаются.

Список использованной литературы

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., 1954.
2. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М., 1975 – 592 с.

3. Мірошниченко Д. С., Шмаков Ю. І. Реологічна поведінка розбавленої суспензії сферичних частинок в нелінійно-пружнов'язкій рідині. Вісник КУ. – 1997. – 3. – С. 77-84,.
4. Мірошниченко Д. С., Насипаний Б. В. Вплив електричного поля на течію розбавленої суспензії жорстких діелектричних еліпсоїдів обертання. Вісник КУ. – 1999. – 2.
5. Ericksen J. L. Transversely isotropic fluids. – Koll. Z., 173. – 1960. – 2.– P. 117.
6. Ericksen J. L. Anisotropic fluids. – Arch. Rat. Mech. Anal. – 1960.– 4.– P. 231.
7. Noll W. The axiomatic method, with special reference to geometry and physics. The foundations of classical mechanics in the light of recent advances in continuums mechanics. (Colloq. at Stanford, 1957).– 1959 P. 266-281.
8. Rivlin R. S., Ericksen J. L. – J. Rat. Mech. Anal.– 1955. – 4.– p. 323.
9. Smith G. F., Rivlin R. S. The anisotropic tensors. Quart. Appl. Math.– 1957.– 15.– P. 308–314.
10. Weissenberg K. A continuum theory of rheological phenomena. Nature.– 1947.– 159.

Поступила в редакцию 10.03.1999

