УДК 519.21

А. И. КОВАЛЕНКО, канд. физ.-мат. наук, Симфероп. гос. ун-т.

АНАЛИЗ НАДЕЖНОСТИ ТРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ СИСТЕМЫ С ВОССТАНОВЛЕНИЕМ

Представлены новые результаты исследования системы, состоящей из одного управляющего и двух подчиненных элементов, приоритетное обслуживание которой осуществляется одним наладчиком. Получены стационарные вероятности состояний системы, коэффициент готовности и средняя наработка между отказами.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему из трех элементов a_1, a_2 и a_3, каждый из которых может находиться в двух состояниях: работоспособном (исправном) и неработоспособном (состоянии отказа). Работоспособной система считается в случае, если исправны элемент a_1 (управляющий) и хотя бы один из подчиненных элементов a_2 или a_3. Один наладчик осуществляет приоритетное обслуживание: ремонт элемента a_3 откладывается (с сохранением времени, затраченного на ремонт) если отказывает один из оставшихся элементов, ремонт элемента a_2 не прекращается в случае отказа элемента a_3, но откладывается, если отказывает элемент a_1. Ремонт элементов системы осуществляется как во время ее работы, так и во время ее остановки, когда система в неработоспособном состоянии, в последнем случае предполагается, что не происходит отказов работоспособных элементов.

Распределения времени отказов экспоненциальные, распределения времени ремонтов произвольные: α_k и $\mu_k(x)$ – интенсивности отказа и ремонта элемента a_k, $k=\overline{1,3}$. Введем обозначения: $f_k(x)$ – плотность распределения вероятностей времени ремонта, r_k – средняя длительность ремонта элемента a_k.

$$f_k(x) = \mu_k(x)\exp\left(-\int_0^x \mu_k(u)du\right), \quad F_k(x) = \exp\left(-\int_0^x \mu_k(u)du\right),$$

$$r_k = \int_0^\infty F_k(x)dx, \quad k=\overline{1,3}. \tag{1}$$

Неработоспособное состояние элемента a_k будем обозначать через $\overline{a}_k$. Пронумеруем возможные состояния системы: (0) – $a_1a_2a_3$

(все элементы системы работоспособны), (1) – $a_1\overline{a}_2a_3$, (2) – $a_1a_2\overline{a}_3$, (3) – $\overline{a}_1a_2a_3$, (4) – $\overline{a}_1a_2\overline{a}_3$, (5) – $a_1\overline{a}_2\overline{a}_3$, (6) – $\overline{a}_1\overline{a}_2a_3$. По определению состояния системы (0), (1) и (2) считаются работоспособными, а (3), (4), (5) и (6) – неработоспособными.

Определим случайный процесс, $\xi(t)$ похожий на линейчатый марковский процесс, рассмотренный в [1]. Фазовое пространство процесса $\xi(t)$ состоит из одной точки 0=(0), трех полупрямых $1=\left((1),\omega_2\right)$, 2=$\left((2),\omega_3\right)$, 3=$\left((3),\omega_1\right)$ и трех четвертьплоскостей 4=$\left((4),\omega_1,\omega_3\right)$, 5=$\left((5),\omega_2,\omega_3\right)$, 6=$\left((6),\omega_1,\omega_2\right)$, где через ω_k обозначено время, затраченное на обслуживание k –го элемента.

Введем функции: $p_k(t)=\mathrm{P}\{\xi(t)=k\}$, $k=\overline{0,6}$,

$$Q_1(y,t)=\mathrm{P}\{\xi(t)=1,\omega_2\le y\},\qquad Q_4(z,x,t)=\mathrm{P}\{\xi(t)=4,\omega_1\le z,\omega_3\le x\},$$

$$Q_2(x,t)=\mathrm{P}\{\xi(t)=2,\omega_3\le x\},\qquad Q_5(y,x,t)=\mathrm{P}\{\xi(t)=5,\omega_2\le y,\omega_3\le x\},$$

$$Q_3(z,t)=\mathrm{P}\{\xi(t)=3,\omega_1\le z\},\qquad Q_6(z,y,t)=\mathrm{P}\{\xi(t)=6,\omega_1\le z,\omega_2\le y\},$$

где $\mathrm{P}\{A\}$ – вероятность события A. Заметим, что введенные функции удовлетворяют соотношениям: $Q_k(0,t)=0$, $k=\overline{1,3}$, $Q_k(0,v,t)=$ $=Q_k(u,0,t)=0$, $k=4,6$, $Q_5(0,v,t)=0$, $Q_5(u,0,t)\neq 0$. Обозначим плотности вероятностей через:

$$q_i(u,t)=\frac{\partial}{\partial u}Q_i(u,t),\qquad i=\overline{1,3},\qquad q_i(u,v,t)=\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}Q_i(u,v,t),\qquad i=\overline{4,6},$$

$q_7(y,t)=\dfrac{\partial}{\partial y}Q_5(y,0,t)$. Имеют место равенства.

$$p_k(t)=Q_k(\infty,t)=\int_0^\infty q_k(u,t)du,\qquad k=\overline{1,3},\tag{2}$$

$$p_k(t)=Q_k(\infty,\infty,t)=\int_0^\infty\int_0^\infty q_k(u,v,t)dudv,\quad r=4,6,\tag{3}$$

$$p_5(t)=Q_5(\infty,\infty,t)=\int_0^\infty\int_0^\infty q_5(u,v,t)dudv+\int_0^\infty q_7(u,t)du.\tag{4}$$

Вероятностные рассуждения и предельные переходы дают следующие интегро-дифференциальные уравнения и граничные условия (пример такого рода рассуждений приведен в [5]):

$$\frac{d}{dt}p_0(t)+(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)p_0(t)=\int_0^\infty q_1(y,t)\mu_2(y)dy+$$

$$+\int_0^\infty q_2(x,t)\mu_3(x)dx+\int_0^\infty q_3(z,t)\mu_1(z)dz, \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}q_1(y,t)+\frac{\partial}{\partial t}q_1(y,t)+(\alpha_1+\alpha_3+\mu_2(y))q_1(y,t)=\int_0^\infty q_6(z,y,t)\mu_1(z)dz, \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}q_2(x,t)+\frac{\partial}{\partial t}q_2(x,t)+(\alpha_1+\alpha_2+\mu_3(x))q_2(x,t)=$$

$$=\int_0^\infty q_4(z,y,t)\mu_1(z)dz+\int_0^\infty q_5(y,x,t)\mu_2(y)dy, \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}q_3(z,t)+\frac{\partial}{\partial t}q_3(z,t)+\mu_1(z)q_3(z,t)=0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}q_4(z,x,t)+\frac{\partial}{\partial t}q_4(z,x,t)+\mu_1(z)q_4(z,x,t)=0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}q_5(y,x,t)+\frac{\partial}{\partial t}q_5(y,x,t)+\mu_2(y)q_5(y,x,t)=0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}q_7(y,t)+\frac{\partial}{\partial t}q_7(y,t)+\mu_2(y)q_7(y,t)=\alpha_3\, q_1(y,t), \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}q_6(z,y,t)+\frac{\partial}{\partial t}q_6(z,y,t)+\mu_1(z)q_6(z,y,t)=0; \tag{12}$$

$$q_1(0,t)=\alpha_2\, p_0(t), \qquad q_2(0,t)=\alpha_3\, p_0(t)+\int_0^\infty q_7(y,t)\mu_2(y)dy, \tag{13}$$

$$q_3(0,t)=\alpha_1 p_0(t), \quad q_4(0,x,t)=\alpha_1 q_2(x,t), \quad q_5(0,x,t)=\alpha_2 q_2(x,t), \tag{14}$$

$$q_6(0,y,t)=\alpha_1 q_1(y,t), \qquad q_7(0,t)=0. \tag{15}$$

2. Основные результаты. Вычисление стационарных характеристик. Эргодичность рассматриваемого процесса обеспечивает существование следующих стационарных вероятностей:

$$p_k=\lim_{t\to\infty}p_k(t),\ k=\overline{0,6},\ g_k(u)=\lim_{t\to\infty}q_k(u,t),\ k=\overline{1,3},7,$$

$$g_k(u,v)=\lim_{t\to\infty}q_k(u,v,t), \qquad k=\overline{4,6},$$

при этом верны соотношения: $p_k = \int_0^\infty g_k(u)du$, $k = \overline{1,3}$,

$$p_5 = \int_0^\infty\int_0^\infty g_5(u,v)dudv + \int_0^\infty g_7(u)du\,,\ p_k = \int_0^\infty\int_0^\infty g_k(u,v)dudv\,, \quad k = 4,6\,.$$

Перейдем к пределу при $t \to \infty$ в соотношениях (5-15):

$$0 = -(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)p_0 + \int_0^\infty g_1(y)\mu_2(y)dy + \int_0^\infty g_2(x)\mu_3(x)dx + \int_0^\infty g_3(z)\mu_1(z)dz\,, \quad (16)$$

$$\frac{d}{dy}g_1(y) + (\alpha_1+\alpha_3+\mu_2(y))g_1(y) = \int_0^\infty g_6(z,y)\mu_2(z)dz\,,$$

$$\frac{d}{dx}g_2(x) + (\alpha_1+\alpha_2+\mu_3(x))g_2(x) = \int_0^\infty g_4(z,x)\mu_1(z)dz + \int_0^\infty g_5(y,x)\mu_2(y)dy\,,$$

$$\frac{d}{dz}g_3(z) + \mu_1(z)g_3(z) = 0\,, \qquad \frac{\partial}{\partial z}g_4(z,x) + \mu_1(z)q_4(z,x,t) = 0\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}g_5(y,x) + \mu_2(y)g_5(y,x) = 0\,, \qquad \frac{d}{dy}g_7(y) + \mu_2(y)g_7(y) = \alpha_3\, g_1(y)\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}g_6(z,y) + \mu_1(z)g_6(z,y) = 0\,, \qquad g_1(0) = \alpha_2\, p_0\,,$$

$$g_2(0) = \alpha_3\, p_0 + \int_0^\infty g_7(y)\mu_2(y)dy\,, \quad g_3(0) = \alpha_1\, p_0\,, \quad g_4(0,x) = \alpha_1 g_2(x)\,,$$

$$g_5(0,x) = \alpha_2\, g_2(x)\,, \quad g_6(0,y) = \alpha_1 g_1(y)\,, \quad g_7(0) = 0\,.$$

Полученная система интегро-дифференциальных уравнений решается достаточно просто (используется только теория обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка). Получаем в следующем порядке стационарные характеристики p_k, $\quad k = \overline{0,6}$:

$$p_3 = p_0\alpha_1 r_1\,, \quad p_4 = p_2\alpha_1 r_1\,, \quad \int_0^\infty\int_0^\infty g_5(y,x)dxdy = p_2\alpha_2 r_2\,,$$

$$p_6 = p_1\alpha_1 r_1\,,\ p_1 = p_0\alpha_2 \overline{F_2}(\alpha_3)\,,\ \int_0^\infty g_7(y)dy = p_0\alpha_2(r_2 - \overline{F_2}(\alpha_3))\,,$$

$$p_5 = p_2\alpha_2 r_2 + p_0\alpha_2(r_2 - \overline{F_2}(\alpha_3)), \quad p_2 = p_0\alpha_3 r_3(1+\alpha_2\overline{F_2}(\alpha_3)),$$

где $\overline{F_2}(\alpha_3) = \int_0^\infty F_2(x)\exp(-\alpha_3 x)dx$ – преобразование Лапласа функции $F_2(x)$, вычисленное в точке α_3. Соотношение (16) можно использовать для проверки полученных результатов. Учитывая соотношение $\sum_{i=0}^{6} p_i = 1$, находим p_0:

$$p_0^{-1} = 1 + \alpha_2 r_2 + (1+\alpha_2\overline{F_2}(\alpha_3))(\alpha_1 r_1 + (1+\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2)\alpha_3 r_3).$$

Коэффициент готовности K и средняя наработка между отказами T выражается через стационарные вероятности [2] : $K = \sum_{k=0}^{2} p_k$, $T = \dfrac{K}{\Lambda}$,
где $\Lambda = \alpha_1 p_0 + (\alpha_1 + \alpha_3) p_1 + (\alpha_1 + \alpha_2) p_2$ – интенсивность потока отказов рассматриваемой системы.

В заключение заметим, что в работе [3] исследовалась двухэлементная система с холодным резервированием с потерей времени ремонта, откладываемого из-за приоритетного обслуживания. В работе [4] исследовалась иерархическая система с однотипными подчиненными элементами.

Список использованной литературы

1. Беляев Ю. К. Линейчатые марковские процессы и их приложения к задачам теории надежности. Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистики. Вильнюс, 1962, 309–323.
2. Вопросы математической теории надежности. Под ред. Гнеденко Б. В. М. ; Радио и связь, 1983. – 376 с.
3. Goel L. R. and Gupta Rakesh. A multicomponent two-unit cold standly system with three modes. Microel. and Reliab., 1983, 23, № 5, 799–803.
4. Коваленко А. И., Стрыгина Н. З. Вычисление стационарных характеристик надежности четырехэлементной иерархической системы с восствновлением. Автомвтика и телемеханика. Российская АН М. 1992 № 1 156–164.
5. Коваленко А. И. Некоторые характеристики надежности симметрмчной иерархической системы первого ранга с восстановлением. Симферопольский Госуниверситет, Симферополь. 1997, – 19 с. Библ. 5 назв. Рукопись деп. в УкрІНТЕІ № 248–Уі 97.

Поступила в редколлегию 12.05.99

