УДК 519.854

Н. Н. Канаева ассист., Крымский ин-т природоохранного и курортного строительства

ИССЛЕДОВАНИЕ ОЦЕНОК ЭФФЕКТИВНОСТИ ЛОКАЛЬНОГО АЛГОРИТМА ДЕКОМПОЗИЦИИ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Найдены средние и экстремальные оценки эффективности ЛА на классе двухквазиблочных структур с дополнительными ограничениями многократного-выбора.

Моделирование практических задач управления динамическими системами требует применения дискретных моделей. Это обусловлено тем, что в рамках оптимизационных задач с дискретными переменными можно адекватно отражать нелинейные зависимости, неделимость объектов, учитывать ограничения логического типа, а также учитывать при формировании допустимых вариантов всевозможные технологические (в том числе и качественные) требования.

Для решения таких задач в дискретном программировании (ДП) необходимо создание эффективных алгоритмов их решения.

Задачи ДП, возникающие на практике, часто имеют специальную структуру, причем матрицы ограничений таких задач сильно разрежены, а ненулевые элементы в большинстве случаев группируются в блоки (чаще всего вдоль главной диагонали). Блочность многих прикладных задач ДП обусловлена слабой связностью моделируемых реальных сложных систем

Среди блочных задач особо выделим квазиблочную структуру (рис.1), которую имеют задачи календарного планирования, оптимального резервирования гостиничных номеров, задачи линейного динамического программирования, некоторые задачи управления трудовыми ресурсами, задачи многоэтапного стохастического программирования и др.

Как правило, блоки в таких задачах характеризуют как производство на разных предприятиях, так и состояние производства в различные моменты времени. Связующие строки (из B_0 – см. рис.1) отражают ограничения на использование ресурсов или спрос, для удовлетворения которого необходима продукция более чем одного предприятия, возможность выбора различных альтернатив развития производства.

Для решения квазиблочных задач ДП (с матрицей ограничений $B_1 - B_k$ – рис.1) достаточно эффективен локальный алгоритм (ЛА), использующий специфику матрицы условий. [1]. Представляет интерес определение эффективности ЛА для решения квазиблочных задач ДП с дополнительными ограничениями (такой ЛА будем называть модифицированным ЛА (МЛА)).

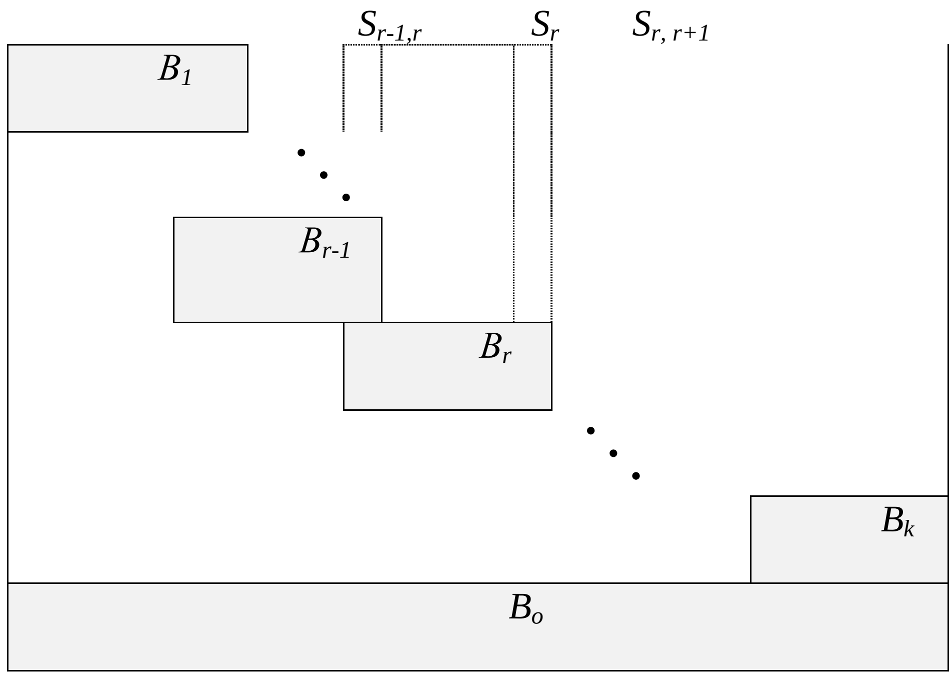

Рис.1. Квазиблочная матрица с дополнительными ограничениями.

МЛА предназначен для решения задач вида

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_j) \to \max \tag{1}$$

при ограничениях

$$g_i(x_{j_{i1}}, ..., x_{j_{ip_i}}) = b_i, \quad i = 1, ..., m; \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} g_{m+p}^{j}(x_j) = b_{m+p}, \quad p = 1, ..., N, \tag{3}$$

$$x_j \in B_j = \{ \ b_{j_1}, ..., b_{j_{q_j}} \} \quad j = 1, ..., n. \tag{4}$$

Будем рассматривать случай булевых переменных: $x_j = 0, 1; \quad j = 1,..., n,$ и ограничения (3) специального вида – ограничения многократного выбора, т.е.

$$\sum_{j \in J_p} x_j \le \nu, \quad p = 1,..., N; \quad J_{p_1} \bigcap J_{p_2} = \varnothing, \quad p_1 \ne p_2, \quad \bigcup_p J_p = \{1,..., n\},$$

Множество этих ограничений будем обозначать $L_N(\nu)$.

Исследование оценок эффективности МЛА для задач ДП с ограничениями многократного выбора одновариантного типа (при $\nu = 1$) рассмотрены в [2,3]. Рассмотрим ограничения многовариантного типа (при $\nu > 1$).

Для удобства изложения МЛА нам потребуются следующие обозначения: $f(X_s) = \sum_{j \in S} f_j(x_j)$, где S_r - множество индексов переменных, входящих в $r-$ й блок B_r; $S_{r,r+1}$ - множество индексов переменных, входящих в блоки B_r и B_{r+1} одновременно, U_r-множество ограничений в блоке B_r.

МЛА, имеющий декомпозиционный характер, реализуется по следующей схеме динамического программирования:

$$f(X_{\sigma_r}) = \max_{X_{S_{r-1,r}}, X_{S_r}, T^{r-1}} \left\{ f(X_{S_r}) + f(X_{\sigma_{r-1}}) \right\},$$

где $X_{\sigma_{r-1}} = X_{\sigma_{r-1}}(X_{S_{r-1,r}}; T^{r-1})$ – решения задач ДП, полученные для всевозможных допустимых $X_{S_{r-1,r}}$ и $T^{r-1} = (\theta_1^{r-1}, \theta_2^{r-1},..., \theta_N^{r-1})$, соответствующих блоку B_{r-1}.

Для блока B_r решается следующая задача:

$$f(X_{\sigma_r}) = f(X_{S_r}) + f(X_{S_{r-1,r}}) + f(X_{\sigma_{r-1}}) \to \max$$

при ограничениях

$$q_i(x_{j_{i_1}},..., x_{j_{i_p}}) = b_i, \quad i \in U_r,$$

$$\sum_{j \in \sigma_r} q_{m+p}^j(x_j) = \theta_p^r, \quad p = 1,..., N,$$

$$\sum_{j \in \sigma_{r-1}} q_{m+p}^j(x_j) = \theta_p^{r-1}, \quad p = 1,..., N,$$

Представляет интерес оценка вычислительной сложности МЛА, позволяющая доказать целесообразность применения МЛА для выделенного класса задач.

Под оценкой сложности $\varphi_A(p)$ (в наихудшем случае) алгоритма A на классе задач P ДП с n булевыми переменными понимается величина $\varphi_A(p)=\sup\limits_{p\in P}\varphi_A(p)$, где $\varphi_A(p)$- число просмотренных вершин куба E^n в результате решения задачи $p\in P$ с помощью алгоритма A.

ОЭ МЛА при решении задач ДП с n булевыми переменными и N дополнительными ограничениями вида для двухквазиблочных структур $Q_2(n)$ следующая:

$$E(Q_2(n),L_N(\nu))=\prod_{p=1}^{N}\sum_{\theta=0}^{\nu}C^{\theta}_{l_1^{(p)}+l_{12}^{(p)}}+\prod_{p=1}^{N}\sum_{\theta=0}^{\nu}C^{\theta}_{l_2^{(p)}+l_{12}^{(p)}},$$

где $l_r^{(p)}$ – число переменных, входящих в блок r и в дополнительное ограничение p, $l_{12}^{(p)}$ – число переменных, входящих в оба блока и в дополнительное ограничение p,

Будем рассматривать:

– частично-невырожденный случай (если $\sum\limits_{p=1}^{N}l_r^{(p)}\ge 1,\quad r=1,2$);

– полностью невырожденный случай (при $l_r^{(p)}\ge 1, r=1,2;$ $p=1,\ldots,N$).

Пусть число переменных в каждом дополнительном ограничении одно и то же и равно l, то есть $l_1^{(p)}+l_{12}^{(p)}+l_2^{(p)}=l,\quad \mathrm{p}=1,\ldots,\mathrm{N}$

Рассмотрим задачу определения среднего значения $E(Q_2(n),L_N(\nu))$ на множестве частично невырожденных двухквазиблочных структур с дополнительными ограничениями многовариантного типа. Необходимо найти сумму E_Σ значений ОЭ МЛА. Одним и тем же значениям параметров $l_1^{(p)},l_{12}^{(p)},l_2^{(p)}$ (а, значит, и одной и той же величине ОЭ МЛА) соответствует L различных структур, где

$$L=\frac{(\sum\limits_{p=1}^{N}l_1^{(p)})!(\sum\limits_{p=1}^{N}l_{12}^{(p)})!(\sum\limits_{p=1}^{N}l_2^{(p)})!}{\prod\limits_{p=1}^{N}l_1^{(p)}!\prod\limits_{p=1}^{N}l_{12}^{(p)}!\prod\limits_{p=1}^{N}l_2^{(p)}!}$$

Таким образом, сумма значений E_Σ ОЭ МЛА $E(Q_2(n), L_N(\nu))$ для различных двухквазиблочных структур равна

$$E_\Sigma = \sum_{\theta_1=0}^{\nu} \ldots \sum_{\theta_N=0}^{\nu} \sum_{l_1^{(1)}+l_{12}^{(1)}+l_2^{(1)}=l} \ldots \sum_{l_1^{(N)}+l_{12}^{(N)}+l_2^{(N)}=l} \frac{(\sum_{p=1}^{N} l_1^{(p)})!}{\prod_{p=1}^{N} l_1^{(p)}!} \frac{(\sum_{p=1}^{N} l_{12}^{(p)})! (\sum_{p=1}^{N} l_2^{(p)})!}{\prod_{p=1}^{N} l_{12}^{(p)}! \prod_{p=1}^{N} l_2^{(p)}!} \cdot$$

$$\cdot (C_{l_1^{(1)}+l_{12}^{(1)}}^{\theta_1} \ldots C_{l_1^{(N)}+l_{12}^{(N)}}^{\theta_N} + C_{l_2^{(1)}+l_{12}^{(1)}}^{\theta_1} \ldots C_{l_2^{(N)}+l_{12}^{(N)}}^{\theta_N})$$

После преобразований получим:

$$E_\Sigma = 2(Nl+2)! \sum_{\theta_1=1}^{\nu} \ldots \sum_{\theta_N=0}^{\nu} \frac{C_l^{\theta_1} C_l^{\theta_2} \ldots C_l^{\theta_N}}{\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_N + 2}$$

Для нахождения среднего значения ОЭ МЛА найдем количество *M* всевозможных частично невырожденных двухквазиблочных структур с N дополнительными ограничениями, которое определится из выражения для E_Σ при $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_N = 0$: $M = \dfrac{(Nl+2)!}{2(l!)^N}$

Таким образом, справедливо следующее

Утверждение. Среднее значение ОЭ МЛА на множестве всевозможных двухквазиблочных структур с дополнительными ограничениями многовариантного типа определяется по формуле

$$\overline{E(Q_2(n), L_N(\nu))} = \frac{E_\Sigma}{2M} = 4 \sum_{\theta_1=0}^{\nu} \ldots \sum_{\theta_N=0}^{\nu} \frac{C_l^{\theta_1} C_l^{\theta_2} \ldots C_l^{\theta_N}}{\theta_1 + \ldots + \theta_N + 2}$$

Асимптотическую формулу определим, используя неравенства:

$$4 \frac{\prod_{p=1}^{N} \sum_{\theta=0}^{\nu} C_l^{\theta}}{2 + N \cdot \nu} < \overline{E(Q_2(n), J_N(\nu))} < 4 \frac{\prod_{p=1}^{N} \sum_{\theta=0}^{\nu} C_l^{\theta}}{2 + N/3}$$

Следствие. Асимптотическая средняя ОЭ МЛА на множестве всевозможных двухквазиблочных структур с дополнительными ограничениями многовариантного типа определяется по формуле

$$\overline{E(Q_2(n), L_N(\nu))} \sim K \cdot \frac{(\sum_{\theta=0}^{\nu} C_l^{\theta})^N}{N}, N \to \infty, K = const.$$

С целью определения «наилучших» и «наихудших» структур матриц условий решаемых с помощью МЛА задач, рассмотрим следующие экстремальные задачи:

$$\prod_{p=1}^{N}\sum_{\theta=0}^{\nu} C^{\theta}_{l_1^{(p)}+l_{12}^{(p)}} + \prod_{p=1}^{N}\sum_{\theta=0}^{\nu} C^{\theta}_{l_2^{(p)}+l_{12}^{(p)}} \to extr$$

при ограничениях

$$\sum_{p=1}^{N}(l_1^{(p)}+l_{12}^{(p)}+l_2^{(p)})=n,$$

$$l_{12}^{(p)},\quad l_r^{(p)}\ge 0, -\, целые,\quad r=1,2;\quad p=1,\dots,N.$$

В полностью невырожденном случае доказаны утверждения:

I. $$\min E(Q_2(n),L_N(\nu)) = 3^{N-1}\sum_{\theta=0}^{\nu}((2-R)C^{\theta}_{[(n-N)/2]-N+2}+RC^{\theta}_{[(n-N)/2]-N+3}),$$

где $R = n - N - 2\cdot[(n-N)/2]$.

II. $$\max E(Q_2(n),L_N(\nu)) = (\sum_{\theta=0}^{\nu}C^{\theta}_{[(n-N)/N]})^N + (\sum_{\theta=0}^{\nu}C^{\theta}_{[(n-N)/N]+R})^N,$$

где $R = n - N - N[(n-N)/N]$.

Для частично-невырожденного случая доказано утверждение:

III. $$\max E(Q_2(n),L_N(\nu)) \le 2(\sum_{\theta=0}^{\nu}C^{\theta}_{\frac{n-2}{N}+1}) + (\sum_{\theta=0}^{\nu}C^{\theta}_{\frac{n-2}{N}})^{N-1}$$

Показано также, что значение ОЭ МЛА $E(Q_2(n),L_N(\nu))$ при решении двухквазиблочных задач с n переменными и N дополнительными ограничениями лестничного типа (когда структура матрицы B_0 блочно-диагональная):

$$3\cdot 2^{\frac{N}{2}-1}\sqrt{n-N+2} \le E(Q_2(n),L_N(\nu)) \le \begin{cases} (1+\dfrac{n+1}{N-1})^{N-1}, N \le \dfrac{n+4}{3} \\ 4(1+\dfrac{n-2}{N-2})^{N-2}, N > \dfrac{n+4}{3} \end{cases}$$

Таким образом, при решении двухквазиблочных задач ДП с дополнительными ограничениями многократного выбора МЛА достаточно эффективен по сравнению с существующими алгоритмами ДП и является алгоритмом с квазиэкспоненциальной средней оценкой эффективности.

Список использованной литературы.

1. Щербина О.А. О локальных алгоритмах решения квазиблочных задач дискретного программирования. //Проблемы кибернетики. - 1983, вып.40, с.171-200.
2. Канаева Н.Н., Щербина О.А. .Об эффективности модифицированного локального алгоритма решения задач дискретной оптимизации. //Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1984, т.24, №10, с.1520-1529.
3. Канаева Н.Н., Щербина О.А. О модифицированном локальном алгоритме для задач дискретного программирования. //Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1986, т.26, №2,с.263-275.

Поступила в редколлегию 15.04.99