

МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

УДК 532.59: 551.465

Ю. Б. ИВАНОВ, канд. физ.–мат. наук, Симферопольский гос. ун-т

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ БАСЕЙНЕ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ

Математические модели, описывающие движение неоднородной вращающейся жидкости в замкнутых бассейнах с дном переменного профиля, позволяют предвычислять важные для прогнозирования характеристики волновых процессов, протекающих в обширных природных водоёмах, например, таких как Чёрное море. Интерес к свободным колебаниям неоднородной жидкости вызван тем, что периоды и распределение амплитуд, полученные в рамках адекватной математической модели, указывают участки частотного спектра внешних воздействий и области акватории наиболее чувствительные к резонансному усилению волн изучаемого типа.

Постановка задачи. Рассмотрим вращающийся бассейн переменной глубины $H(x, y)$, максимальная глубина которого H^0 много меньше его горизонтального размера l_0 . Бассейн содержит тяжелые идеальные несмешивающиеся жидкости, плотность нижней жидкости ρ_2 больше плотности верхней жидкости ρ_1 . Требуется определить малые свободные колебания такой системы около положения ее статического равновесия.

Пусть градиенты глубины $H(x, y)$ достаточно малы, чтобы движение жидкости в каждом слое удовлетворяло уравнениям линейной теории длинных волн [1].

Обозначим u_1, v_1 – горизонтальные составляющие скорости частицы жидкости верхнего слоя, u_2, v_2 – скорости частиц жидкости нижнего слоя, η_1 и η_2 – отклонение от положения равновесия свободной поверхности и внутренней поверхности раздела двух жидкостей. Систему уравнений теории мелкой воды, описывающую движение двухслойной вращающейся жидкости, следуя работе [2], запишем в виде

$$\begin{aligned}
 u_{1t} - f \cdot v_1 + g \cdot \eta_{1x} &= 0, \\
 v_{1t} + f \cdot u_1 + g \cdot \eta_{1y} &= 0, \\
 u_{2t} - f \cdot v_2 + g \cdot \eta_{1x} + g \cdot \delta\rho(\eta_2 - \eta_1)_x &= 0, \\
 v_{2t} + f \cdot u_2 + g \cdot \eta_{1y} + g \cdot \delta\rho(\eta_2 - \eta_1)_y &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где $f = f_0 + \beta y$, $\delta\rho = 1 - \rho_1/\rho_2$, $\rho_1 < \rho_2$. Систему (1) дополняем уравнениями сохранения количества жидкости в каждом слое

$$\begin{aligned}
 (H_1 u_1)_x + (H_1 v_1)_y + (\eta_1 - \eta_2)_t &= 0, \\
 (H_2 u_2)_x + (H_2 v_2)_y + \eta_{2t} &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

где $H_1 = H_1(x, y) \leq H_1^0$ и $H_2 = H_2(x, y)$ – толщины в точке (x, y) верхнего и нижнего слоя жидкости в состоянии равновесия. Функции $H_1(x, y)$ и $H_2(x, y)$ определим следующим образом.

Пусть $H(x, y)$ – глубина бассейна, H_1^0 – максимальная толщина верхнего слоя в состоянии равновесия.

$$\begin{aligned}
 \text{Если } H(x, y) \leq H_1^0 \text{ то } H_1(x, y) &= H(x, y), H_2(x, y) = 0; \\
 \text{Если } H(x, y) \geq H_1^0 \text{ то } H_1(x, y) &= H_1^0, H_2(x, y) = H(x, y) - H_1^0.
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Из формул (3) следует, что $H(x, y) = H_1(x, y) + H_2(x, y)$ для любой точки области G , занимаемой бассейном.

На границе Γ_i плоской области G_i , занимаемой i -ой жидкостью, $G_2 \subset G_1 = G$, задаем граничные условия $(H(\Gamma)V_n)_i = 0$, где V_n – нормальная к границе составляющая горизонтальной скорости частиц жидкости.

Поставим задачу отыскания периодических, ограниченных решений системы уравнений, определяемой равенствами (1-3), то есть решений вида

$$(u, v, \eta)(x, y, t) = (u, v, \eta)(x, y) \cdot e^{-i\omega t},$$

удовлетворяющих однородным граничным условиям. Предполагая, что $|f^2(y) - \omega^2| > G > 0$ для любой точки области G , из системы (1-2) исключаем скорости u, v и приходим к системе для η_1 и $d\eta = \eta_2 - \eta_1$ (изменение толщины верхнего слоя). В безразмерном вещественном виде систему запишем следующим образом

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}(H_2/D) + \lambda(\alpha^2 - \lambda^2)\mathbf{E}]\bar{\eta}_1 + [\delta\rho\mathcal{L}(H_2/D) + \lambda(\alpha^2 - \lambda^2)\mathbf{E}]\overline{d\eta} &= 0, \\ \mathcal{L}(H_1/D)\bar{\eta}_1 - \lambda(\alpha^2 - \lambda^2)\overline{d\eta} &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{где } D(y) = 1 + \frac{1}{1 - \chi^2} \beta y(2 + \beta y), \quad \chi = \lambda/\alpha, \quad \chi \neq 1, \quad \alpha > 0,$$

где $\alpha = fl_0/\sqrt{gH_0}$ – безразмерный числовой коэффициент (параметр дивергентности) в который входит параметр Кориолиса f , средняя глубина бассейна H_0 , ускорение свободного падения g ; $\lambda = \omega l_0/\sqrt{gH_0}$ – безразмерный спектральный параметр, в который входит частота свободных колебаний ω ; $\delta\rho = 1 - \rho_1/\rho_2$; $H_1(x, y)$ – переменная толщина верхнего слоя, $H_2(x, y)$ – переменная толщина нижнего слоя в состоянии статического равновесия.

Оператор-матрица $\mathcal{L}(h)$ с переменным коэффициентом $h = h(x, y)$ есть

$$\mathcal{L}(h) = \lambda \begin{pmatrix} L(h) & 0 \\ 0 & L(h) \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 0 & M^*(h) \\ M(h) & 0 \end{pmatrix}.$$

Операторы $L(h)$ и $M(h)$ записываются в дифференциальной форме в следующем виде:

$$\begin{aligned} -L(h) &= \frac{\partial}{\partial x} h(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} h(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \\ M(h) &= \frac{\partial}{\partial x} (1 + \beta y) h(x, y) \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} (1 + \beta y) h(x, y) \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned}$$

Оператор $\mathcal{L}(h)$ будем записывать также в виде

$$\mathcal{L}(h) = \lambda \cdot \mathbf{L}(h) - \alpha \mathbf{M}(h)$$

с операторами-матрицами $\mathbf{L}(h)$ и $\mathbf{M}(h)$, определяемыми видом $\mathcal{L}(h)$.

Коэффициент $H_2(x, y)$, переменную толщину нижнего слоя, продолжим нулем на область $G \setminus G_2$. Систему (4) с переменными коэффициентами H_1, H_2 рассматриваем на всей области G , занимаемой бассейном, граница Γ_2 области G_2 является теперь внутренней границей, на которой коэффициент H_2 имеет слабый разрыв.

Задачу о малых свободных колебаниях двухслойной жидкости формулируем как задачу отыскания значений спектрального параметра λ , при которых система (4) имеет обобщенные, ограниченные на области G решения. Ограниченность решений понимается в энергетической норме, задаваемой положительно определенным оператором $L(H)$ на подпространстве функций ортогональных единице.

Под бароклинными модами будем понимать решения системы (4) для которых $\|\overline{d\eta}\|$ в несколько раз больше $\|\overline{\eta}_1\|$. Тогда $\|\overline{\eta}_2\| > \|\overline{\eta}_1\|$ и в том случае оправдано называть бароклинные моды внутренними волнами.

Для вывода уравнений, определяющих бароклинные моды, исключаем из системы (4) неизвестное $\overline{\eta}_1$. Предполагая, что оператор $\mathcal{L}(H_1/D)$ имеет обратный, из второго уравнения системы (4) находим

$$\overline{\eta}_1 = \lambda(\alpha^2 - \lambda^2)L^{-1}(H_1/D)\overline{d\eta} \quad (5)$$

и, подставляя $\overline{\eta}_1$ в первое уравнение системы (4), получаем следующее уравнение для толщины верхнего слоя $\overline{d\eta}$:

$$\delta\rho \frac{H_1^0}{H^0} \mathcal{L}(H_2/D)\overline{d\eta} + \lambda(\alpha^2 - \lambda^2)\overline{d\eta} + \lambda(\alpha^2 - \lambda^2) \frac{H_2^0}{H^0} \mathcal{R}_1(\lambda)\overline{d\eta} + \mathcal{R}_2(\lambda)\overline{d\eta} = 0$$

где $\mathcal{R}_1(\lambda) = \left[\frac{H_1^0}{H^0} \mathcal{L}(H_2/D)\mathcal{L}^{-1}(H_1/D) - \mathbf{E} \right]$, (6)

$$\mathcal{R}_2(\lambda) = \lambda^2(\alpha^2 - \lambda^2)^2 \frac{H_1^0}{H^0} \mathcal{L}^{-1}(H_1/D).$$

В уравнении (6) основным пучком операторов, определяющим частоты бароклиновых колебаний, является функция - оператор $Q(\lambda)$

$$Q(\lambda) = \delta\rho \frac{H_1^0}{H^0} \mathcal{L}(H_2/D) + \lambda(\alpha^2 - \lambda^2)\mathbf{E}.$$

Оператор \mathcal{R}_1 в уравнении (6) учитывает влияние градиентов дна и наклонных стенок бассейна и, при $H = H^0$ – константа (бассейн с вертикальными стенками), $\mathcal{R}_1 \equiv 0$. Оператор \mathcal{R}_2 учитывает наличие свободной поверхности у верхнего слоя.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_2^0} \frac{H_2(x, y)}{D} &= h_2(x, y), \quad 0 \leq h_2(x, y) \leq 1 \\ \frac{1}{H_1^0} \frac{H_1(x, y)}{D} &= h_1(x, y), \quad 0 \leq h_1(x, y) \leq 1 \\ \delta\rho \frac{H_1^0}{H^0} \frac{H_2(x, y)}{D} &= h_e(x, y), \quad 0 \leq h_e(x, y) \ll 1 \\ \frac{H_2^0}{H^0} &= \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < 1. \end{aligned}$$

Уравнение (6) для колебаний слоя запишется теперь в виде

$$\left[\mathcal{L}(h_e) + \lambda(\alpha^2 - \lambda^2)(E + \varepsilon\mathcal{R}_1) + \mathcal{R}_2(\lambda) \right] \overline{d\eta} = 0. \quad (7)$$

В уравнении (7) оператор \mathcal{R}_1 , в отличие от остальных, является ограниченным, но не самосопряженным оператором. Имеет место оценка его нормы $\|\mathcal{R}_1\| < 1$.

Уравнение (7) будем рассматривать как возмущение уравнения

$$\left[\mathcal{L}(h_e) + \lambda(\alpha^2 - \lambda^2)E + \mathcal{R}_2(\lambda) \right] \overline{d\eta} = 0, \quad (8)$$

в котором коэффициент – оператор E (единичный оператор) возмущается ограниченным оператором $\varepsilon\mathcal{R}_1$, норма которого строго меньше единицы.

Используя метод возмущений для операторных уравнений, получим приближенные формулы для приращений вещественной и мнимой части решений уравнения (7). Пусть $\lambda_0, \overline{d\eta}_0$ – точное решение уравнения (8). Запишем уравнение (7) в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[\lambda(\varepsilon), E(\varepsilon)] \overline{d\eta}(\varepsilon) &= 0, \\ \text{где } E(\varepsilon) &= E + \varepsilon\mathcal{R}_1, \quad \lambda(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon d\lambda, \quad \overline{d\eta}(\varepsilon) = \overline{d\eta}_0 + \varepsilon \overline{d\omega}, \end{aligned} \quad (9)$$

и линеаризуем его в точке $\varepsilon = 0$. Получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\lambda_0, E) \overline{d\eta}_0 + \varepsilon \left[d\lambda \cdot \mathcal{D}\mathcal{A} + \lambda_0(\alpha^2 - \lambda_0^2) \mathcal{R}_1 \right] \overline{d\eta}_0 + \varepsilon \mathcal{A}(\lambda_0, E) \overline{d\omega} &= 0, \\ \text{где } \mathcal{D}\mathcal{A} &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathcal{A}(\lambda_0, E). \end{aligned}$$

Учитывая, что $\mathcal{A}(\lambda_0, E)\overline{d\eta_0} = 0$, приходим к уравнению для $\overline{d\omega}$ и $d\lambda$:

$$\mathcal{A}(\lambda_0, E)\overline{d\omega} = -[d\lambda \cdot \mathcal{D}\mathcal{A} + \lambda_0(\alpha^2 - \lambda_0^2)\mathcal{R}_1]\overline{d\eta_0}. \quad (10)$$

Из условия разрешимости этого уравнения, то есть ортогональности его правой части к вектору $\overline{d\eta_0}$, то есть

$$d\lambda \left(\mathcal{D}\mathcal{A}\overline{d\eta_0}, \overline{d\eta_0} \right) + \lambda_0(\alpha^2 - \lambda_0^2) \left(\mathcal{R}_1\overline{d\eta_0}, \overline{d\eta_0} \right) = 0,$$

находим комплексное приращение $d\lambda$:

$$d\lambda = -\lambda_0(\alpha^2 - \lambda_0^2) \frac{\left(\mathcal{R}_1\overline{d\eta_0}, \overline{d\eta_0} \right)}{\left(\mathcal{D}\mathcal{A}\overline{d\eta_0}, \overline{d\eta_0} \right)}. \quad (11)$$

Найдем вещественную $\text{Re}_- d\lambda$ и мнимую $\text{Im}_- d\lambda$ часть приращения собственного значения. Введем обозначения для вещественных векторов

$$\begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \end{pmatrix} = \mathcal{E}^{-1}(h_1) \begin{pmatrix} \overline{d\eta_{0R}} \\ \overline{d\eta_{0I}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \end{pmatrix} = \mathcal{E}(h_2) \begin{pmatrix} \overline{d\eta_{0R}} \\ \overline{d\eta_{0I}} \end{pmatrix}.$$

Тогда из равенства (11) получаем требуемые формулы

$$\begin{aligned} \text{Re}_- d\lambda &= -\lambda_0(\alpha^2 - \lambda_0^2) \frac{(\vec{u}_1, \vec{v}_1) + (\vec{u}_2, \vec{v}_2) - (\overline{d\eta_0}, \overline{d\eta_0})}{\left(\mathcal{D}\mathcal{A}\overline{d\eta_0}, \overline{d\eta_0} \right)}, \\ \text{Im}_- d\lambda &= -\lambda_0(\alpha^2 - \lambda_0^2) \frac{(\vec{u}_1, \vec{v}_2) - (\vec{u}_2, \vec{v}_1)}{\left(\mathcal{D}\mathcal{A}\overline{d\eta_0}, \overline{d\eta_0} \right)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Метод решения. Результаты для двухслойной модели Черного моря. Для численного решения уравнения (7) применялся метод Галеркина, в котором в качестве базисных были выбраны непрерывные кусочно-линейные функции, финитные на треугольных конечных элементах, аппроксимирующих область G , на которой искалось решение. Уравнение (7) в конечномерном пространстве рассматриваем теперь как задачу на вычисление собственных значений и собственных векторов пучка матриц размерности N , где N – число узлов треугольной сетки в области G .

Для отыскания наименьших по модулю собственных значений λ конечномерной спектральной задачи, удовлетворяющих условию $|\lambda| > \alpha > 0$, поступим следующим образом. Конечномерное уравнение (7) при $\varepsilon = 0$ запишем в виде

$$\left[\lambda L(h_e) - \alpha M(h_e) + \lambda(\alpha^2 - \lambda^2) B \right] \overline{d\eta} + R_2(\lambda) d\eta = 0,$$

где B – матрица масс конечных элементов, $h_e(x, y) = \delta\rho \frac{H_1^0}{H^0} H_2(x, y)$.

Разделим уравнение на $\lambda \neq 0$ и, перенеся слагаемые в правую часть, получим эквивалентное уравнение

$$\left[L(h_e) + \alpha^2 B \right] d\eta = \lambda^2 \mathcal{P}(\lambda) d\eta,$$

где $\mathcal{P}(\lambda) = B + \lambda^{-3} (\alpha M(h_e) - R_2(\lambda))$.

Факторизуем матрицу $L(h_e) + \alpha^2 B = S \cdot S^T$, где S – невырожденная треугольная матрица. В уравнении сделаем замену переменных $S^T \overline{d\eta} = \overline{d\xi}$ и умножим его на S^{-1} . Тогда уравнение запишется в виде

$$S^{-1} \mathcal{P}(v^{-1/2}) (S^{-1})^T d\xi = v \cdot d\xi,$$

где $v = \lambda^{-2}$, $v > 0$.

Для отыскания собственных значений $\alpha^{-2} > v_1 \geq \dots \geq v_k \geq \dots$ применялся итерационный процесс, созданный на основе блочно-степенного метода [3].

Задача решалась для Черного моря в двухслойном приближении при следующих значениях его параметров: $\delta\rho = 1 - \rho_1/\rho_2 = 0,002$, толщина верхнего слоя $H_1^0 = 200$ м, максимальная глубина $H^0 = 2200$ м.

В Таблице 1., в которой приведены значения амплитуд, использованы следующие обозначения. Пусть $a_k = (\eta_{k,1}^2(x, y) + \eta_{k,2}^2(x, y))^{1/2}$ – амплитуда колебаний поверхности η_k в точке (x, y) , $\eta_{k,1}$ – вещественная, $\eta_{k,2}$ – мнимая часть величины η_k ; $a_{k,\max}$ – максимум амплитуды по узлам сетки для поверхности $k = 1, 2$; $\bar{a}_k = a_k/a_{2,\max}$ – амплитуда поверхности η_k , нормированная на максимальную амплитуду внутренней волны η_2 .

Для волн с периодами $T < T_m = 1053$ мин. результаты расчетов представлены в левой части Таблицы 1.; \bar{a}_1 – амплитуда свободной поверхности η_1 в точке максимума амплитуды внутренней волны ($\bar{a}_2 = 1,0$); $\bar{a}_{1,\max}$ – максимальное значение амплитуды свободной поверхности.

Таблица 1.

T_{\min}	\bar{a}_1	$\bar{a}_{1,\max}$	$T_{\text{час}}$	\bar{a}_1	$\bar{a}_{1,\max}$	\bar{a}_2
1047.1	$3.83 \cdot 10^{-3}$	$4.88 \cdot 10^{-3}$	64.1	$1.19 \cdot 10^{-5}$	$1.19 \cdot 10^{-5}$	1.0
1038.8	$7.44 \cdot 10^{-3}$	$1.10 \cdot 10^{-2}$	72.9	$1.49 \cdot 10^{-5}$	$2.19 \cdot 10^{-5}$	0.96
1039.9	$3.48 \cdot 10^{-3}$	$1.53 \cdot 10^{-2}$	87.5	$1.17 \cdot 10^{-5}$	$1.50 \cdot 10^{-5}$	0.95
1027.4	$4.43 \cdot 10^{-3}$	$1.52 \cdot 10^{-2}$	104.0	$1.36 \cdot 10^{-5}$	$1.36 \cdot 10^{-5}$	1.0
1018.4	$1.38 \cdot 10^{-3}$	$5.48 \cdot 10^{-3}$	132.2	$2.04 \cdot 10^{-5}$	$3.01 \cdot 10^{-5}$	0.88
1011.4	$4.14 \cdot 10^{-3}$	$8.93 \cdot 10^{-3}$	135.2	$2.46 \cdot 10^{-5}$	$2.46 \cdot 10^{-5}$	1.0

Линии уровня амплитуды \bar{a}_2 для одной из внутренних волн $\varepsilon = 0$ изображены на рис.1.

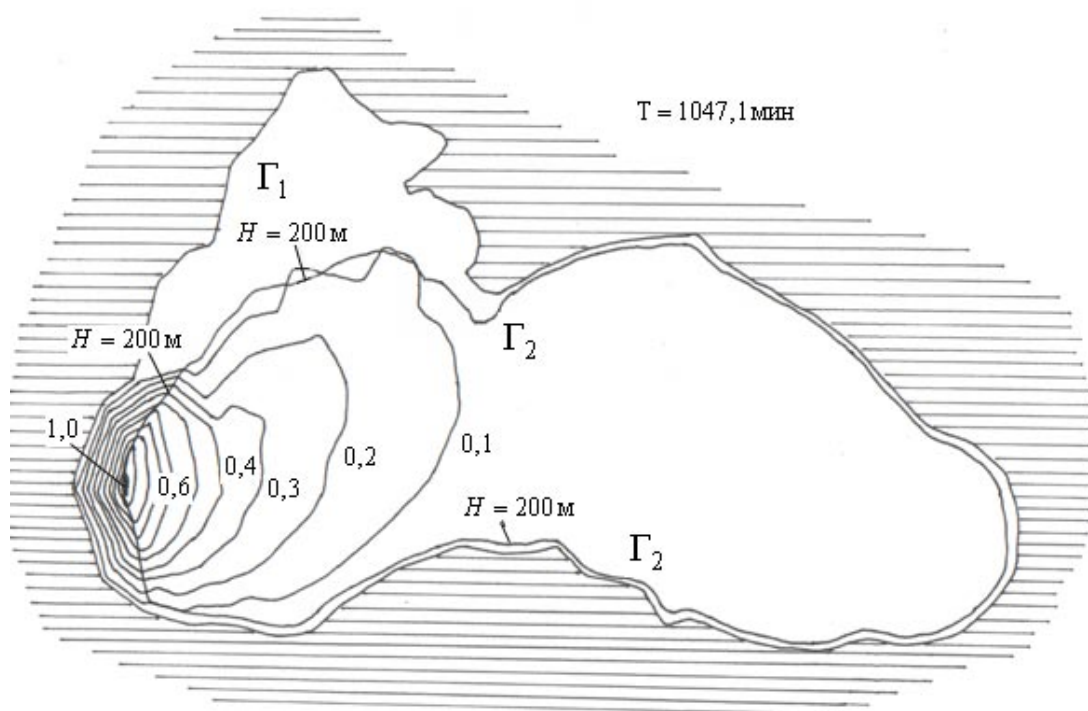


Рис.1 Линии уровней амплитуды \bar{a}_2 доинерционной внутренней волны

На основании численных результатов для волн рассматриваемого типа можно сделать следующие выводы. Амплитуда $a_2(x, y)$ поверхности раздела жидкостей достигает максимальных значений на внутренней

границе Γ_2 , амплитуда $a_1(x, y)$ свободной поверхности достигает максимальных значений на внешней границе Γ_1 . Амплитуда колебаний свободной поверхности значительно меньше амплитуды колебаний внутренней границы раздела жидкостей. Максимальный период внутренних колебаний равен, примерно, 1047 мин. и близок к инерционному периоду $T_{in} = 1053,14$ мин. $\approx 17,5$ час. Внутренние волны, движущиеся в положительном направлении имеют период больший, чем внутренние волны, движущиеся в отрицательном направлении. Разность между ближайшими периодами, в среднем для первых шести волн одного типа, $\Delta T \approx 7$ мин.

Поставим теперь задачу отыскания наибольших по модулю собственных значений спектральной задачи, удовлетворяющих неравенству $0 < \lambda < \alpha$. Конечномерное уравнение для матричного пучка запишем в виде

$$[\alpha M(h_e) - R_2(\lambda)]d\eta = \lambda [L(h_e) + (\alpha^2 - \lambda_0^2)B]d\eta.$$

Факторизуем матрицу $L(h_e) + (\alpha^2 - \lambda_0^2)B = S(\lambda_0) \cdot S^T(\lambda_0)$, где $S(\lambda_0)$ – невырожденная при $\lambda_0 < \alpha$ треугольная матрица, зависящая от спектрального параметра λ_0 . В уравнении сделаем замену переменных $S^T d\eta = d\xi$ и умножим его на S^{-1} . Тогда уравнение запишется в виде

$$S^{-1}P(\lambda_0)(S^{-1})^T d\xi = \lambda \cdot d\xi, \text{ где } P(\lambda_0) = \alpha M(h_e) - R_2(\lambda_0).$$

Для нахождения наибольших собственных значений этого уравнения применялся степенной метод итерирования в подпространстве [3].

Численные результаты для Черного моря при указанных ранее значениях параметров двухслойной жидкости приведены в правой части таблицы; \bar{a}_1 – амплитуда свободной поверхности в точке максимума амплитуды внутренней волны; $\bar{a}_{1, \max}$ – максимальное значение амплитуды свободной поверхности; \bar{a}_2 – амплитуда внутренней волны в точке максимума амплитуды свободной поверхности.

Линии уровня амплитуды \bar{a}_2 , вычисленные при $\varepsilon = 0$, для одной из внутренних сверхинерционных волн показаны на рис.2.

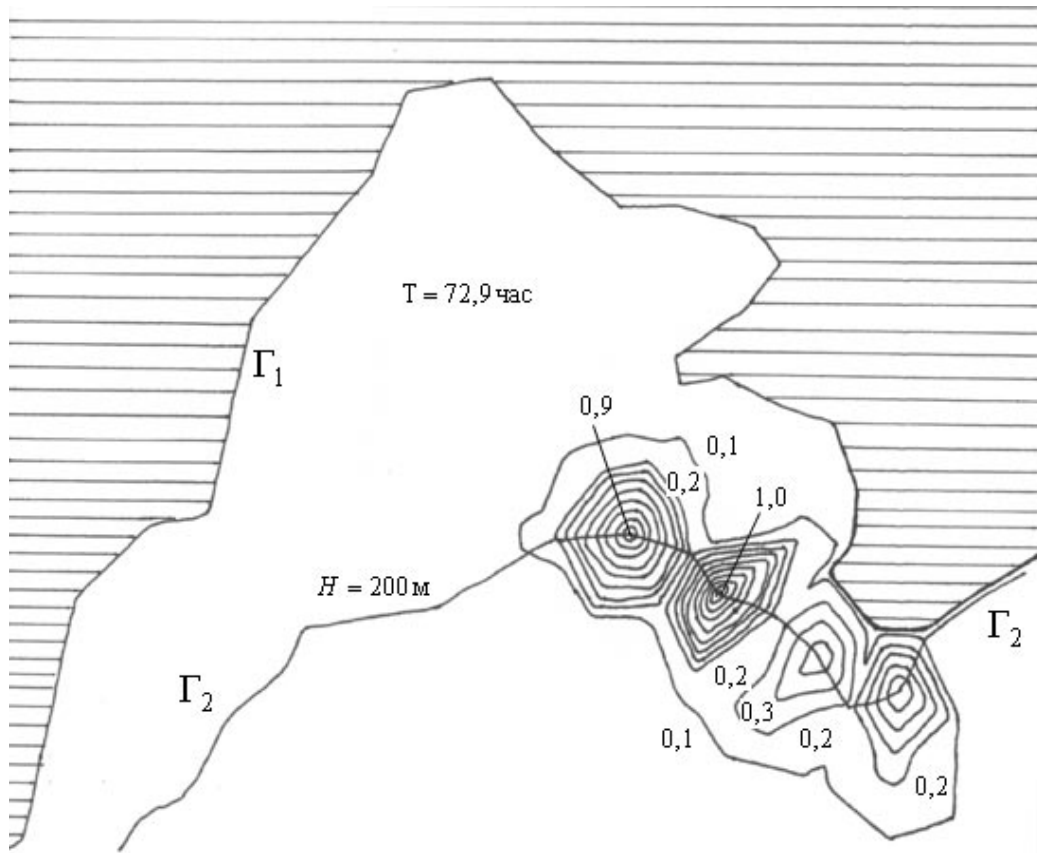


Рис. 2 Линии уровней амплитуды \bar{a}_2 сверхинерционной внутренней волны

На основании численных результатов для внутренних волн, имеющих период больший инерционного, можно сделать следующие выводы. Амплитуда $a_2(x, y)$ поверхности раздела жидкостей и амплитуда $a_1(x, y)$ свободной поверхности достигают своих максимальных значений на внутренней границе Γ_2 ; в пределах достигнутой точности расчетов обоснованно предположить, что максимумы амплитуд внутренней и поверхностной волны достигаются с одних и тех же точек границы Γ_2 . Амплитуда колебаний свободной поверхности много меньше амплитуды колебаний внутренней границы раздела жидкостей.

Минимальный период внутренних колебаний этого типа $T_{\min} = 64,1$ час. Средняя разность между шестью наименьшими периодами $\Delta T \approx 14$ час. Внутренние волны распространяются в положительном направлении.

Ю. Б. Иванов

Список использованной литературы

1. Черкесов Л. В., Иванов В. А., Хартиев С. Н. Введение в гидродинамику и теорию волн. – Санкт–Петербург. Гидрометеоздат, 1992. – 264с.
2. Блон П. Л., Майсек Л. Волны в океане. М.: Мир, 1981. – 480с.
3. Парлет Б. Симметричная проблема собственных значений. М.: Мир, 1983. – 382с.

Поступила в редколлегию 17.03.99