

УДК 539.3

В. А. Герасик, асп., В. Н. Тищенко, канд. физ.-мат. наук,
Симфероп. гос. ун-т**ВОССТАНОВЛЕНИЕ ИСТОЧНИКА ПО ДАННЫМ
НАБЛЮДЕНИЙ.**

В статье описан способ определения мощности, месторасположения и начала действия поверхностного силового источника, действующего на упругое полупространство, по данным записи вертикальных смещений (сейсмограмм) линейного осциллятора (сейсмографа). Алгоритм основан на аналитическом решении задачи Лэмба, полученном в [1]. Особо отмечена роль фронта волны Рэлея как возбудителя смещений, значительно больших, чем при подходе к сейсмографу Р- и SV-волн, что делает ее основным индикатором положения источника в пространстве и времени.

Рассматривается задача о восстановлении поверхностного силового источника – величины силы $P(t)$, эпицентрального расстояния r_0 и времени начала действия t_0 , по данным сейсмографа вертикальных смещений на поверхности упругого полупространства. Сейсмограф моделируется линейным осциллятором с вязким трением, т.е. описывается уравнением движения:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = -\dot{f}(t), \quad t \geq t_1 \quad (1)$$

где t_1 - время включения сейсмографа (подхода Р-волны), $x(t)$ - сейсмограмма вертикальных относительных смещений, $f(t)$ - смещение основания сейсмографа (переносное движение). В момент t_1 прихода сейсмических волн абсолютное движение осциллятора отсутствует, т.е. $x(t_1) = -f(t_1)$, $\dot{x}(t_1) = -\dot{f}(t_1)$.

Повторным интегрированием (1) можно получить его решение в форме, удобной для решения обратной задачи восстановления входного сигнала $f(\bar{t})$ по записи $x(\bar{t})$:

$$f(\bar{t}) = -x(\bar{t}) - \int_0^{\bar{t}} [2n + \omega^2(\bar{t} - \tau)] x(\tau) d\tau + 2n\bar{t}x(0), \quad \bar{t} = t - t_1. \quad (2)$$

Как видно, в этом представлении участвует только сигнал выхода и его интегральные характеристики, что позволяет применить корректные численные процедуры.

Входной сигнал $f(\tilde{t})$ является вертикальным смещением $u_z^P(\tilde{t}, r_0)$ поверхности упругого полупространства от силы $P(\tilde{t})$ ($\tilde{t} \geq 0$), действующей на расстоянии r_0 от сейсмографа, и может быть представлен в виде свертки:

$$\begin{aligned} f(\tilde{t}) = u_z^P(\tilde{t}, r_0) &= \int_0^{\tilde{t}} \dot{P}(\tau) u_z^H(\tilde{t} - \tau, r_0) d\tau + P(0) u_z^H(\tilde{t}, r_0) = \\ &= \frac{d}{d\tilde{t}} \int_0^{\tilde{t}} P(\tau) u_z^H(\tilde{t} - \tau, r_0) d\tau. \end{aligned} \quad (3)$$

Функция $u_z^H(t, r)$ в (3) является решением задачи о действии постоянной силы на упругое полупространство, известной как “задача Лэмба”, аналитический вид которого приводится в [1]:

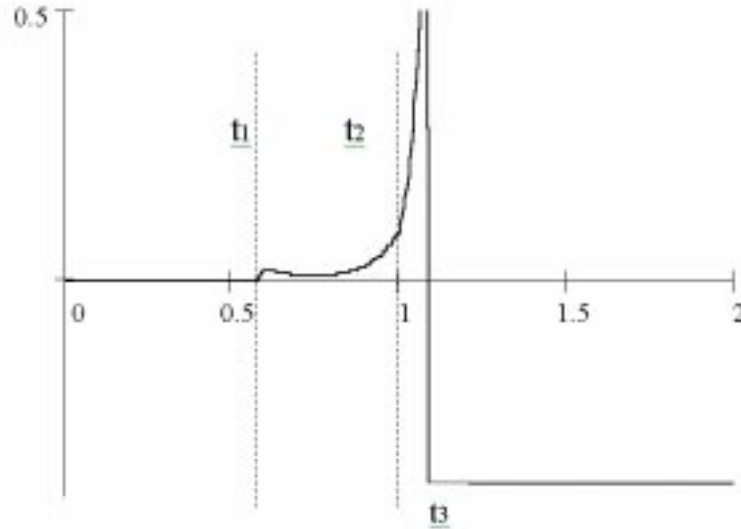


Рис. 1

$$u_z^H(\tilde{t}, r) = \begin{cases} 0, & \tilde{t} \leq \tilde{t}_1 = r/c_1; \\ -\frac{1}{2cr} - \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^2 m_i \sqrt{\frac{\gamma^2 - k_i}{c_2^2 \tilde{t}^2 - k_i r^2}} + \right. \\ \quad \left. + m_3 \sqrt{\frac{k_3 - \gamma^2}{k_3 r^2 - c_2^2 \tilde{t}^2}} \right), & \tilde{t}_1 \leq \tilde{t} \leq \tilde{t}_2 = r/c_2; \\ -\frac{1}{cr} - m_3 \sqrt{\frac{k_3 - \gamma^2}{k_3 r^2 - c_2^2 \tilde{t}^2}}, & \tilde{t}_2 \leq \tilde{t} < \tilde{t}_3 = r/c_R; \\ -\frac{1}{cr}, & \tilde{t} \geq \tilde{t}_3 \end{cases}$$

где c_1, c_2, c_R - скорости распространения продольной, поперечной волн и волны Рэля соответственно, $\gamma = c_2/c_1$, $c = 4\pi\mu(1-\gamma^2)$, $c_R = c_2/\sqrt{k_3}$, $(k_i)^{-1}$ - корни уравнения Рэля [2], m_i - вычеты в этих точках ($i=1,2,3$). На рис.1 приведен график этой функции при $c_2 = 1, \gamma = 1/\sqrt{3}, r = 1, \mu = 1/\pi$.

Если ввести отсчет времени от прихода Р-волны $r_0/c_1 = t_1 - t_0$, то соотношение (3) принимает следующий вид (учитывается $u_z^H(\tilde{t}, r) = 0$ при $\tilde{t} \leq r/c_1$):

$$\begin{aligned} f(\bar{t}) &= \int_0^{\bar{t}} \dot{P}(\tau) u_z^H(\bar{t} + r_0/c_1 - \tau, r_0) d\tau + P(0) u_z^H(\bar{t} + r_0/c_1, r_0) = \\ &= \frac{d}{d\bar{t}} \int_0^{\bar{t}} P(\tau) u_z^H(\bar{t} + r_0/c_1 - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом, величину силы $P(\tilde{t})$ можно определить, решая одно из двух уравнений:

$$\begin{aligned} f(\bar{t}) &= \int_0^{\bar{t}} \dot{P}(\tau) u_z^H(\bar{t} + r_0/c_1 - \tau, r_0) d\tau + P(0) u_z^H(\bar{t} + r_0/c_1, r_0), \\ F(\bar{t}) &= \int_0^{\bar{t}} f(\tau) d\tau = \int_0^{\bar{t}} P(\tau) u_z^H(\bar{t} + r_0/c_1 - \tau, r_0) d\tau. \end{aligned} \quad (5)$$

Последнее уравнение предпочтительнее, так как оно сразу дает значения $P(\tilde{t})$, в отличие от первого уравнения, где определяется только производная с неизвестным $P(0)$. Следует отметить, что величина $F(\bar{t})$ определяется из (2) простым интегрированием:

$$F(\bar{t}) = - \int_0^{\bar{t}} \left[1 + 2n(\bar{t} - \tau) + \frac{1}{2} \omega^2 (\bar{t} - \tau)^2 \right] x(\tau) d\tau + n\bar{t}^2 x(0).$$

При численном решении уравнений (5) следует учитывать вид функции $u_z^H(\bar{t}, r)$, которая имеет особенность в точке $\Delta_3 = t_3 - t_1$ типа $\sqrt{(\Delta_3 - \bar{t})^{-1}}$ при $\bar{t} < \Delta_3$ и становится постоянной при $\bar{t} > \Delta_3$, где t_3 -

абсолютное время прихода волны Рэлея к сейсмографу. Поэтому при $\bar{t} > \Delta_3$ уравнение (5) записывается в виде:

$$f(\bar{t}) = - \int_0^{\bar{t}-\Delta_3} \dot{P}(\tau) \frac{1}{cr_0} d\tau + \int_{\bar{t}-\Delta_3}^{\bar{t}} \dot{P}(\tau) u_z^H(\bar{t} + \Delta_1 - \tau, r_0) d\tau - P(0) \frac{1}{cr_0},$$

$$\Delta_1 = r_0/c_1 \quad (6)$$

и является более предпочтительным для численного решения, чем уравнение (5), так как может быть приближенно оценено при величине Δ_3 , близкой к нулю, т.е. при достаточно малом r_0 :

$$u_z^P(\bar{t}, r_0) = f(\bar{t}) \approx \frac{1}{cr_0} [P(0) - P(\bar{t} - \Delta_3)] - P(0) \frac{1}{cr_0} = -\frac{1}{cr_0} P(\bar{t} - \Delta_3) \quad (7)$$

Этот результат указывает, что решение динамической задачи после прохождения волны Рэлея становится решением статической задачи Буссинеска [1] (квазистатика). Очевидно, этот результат точнее при малых изменениях нагрузки во времени.

При конкретных расчетах предлагается фиксировать определенные значения на сейсмограмме: вступление Р-волны t_1 , SV-волны t_2 и вступление волны Рэлея t_3 . Эти значения четко просматриваются на теоретической сейсмограмме линейного осциллятора при различных величинах силы $P(t)$, особенно t_3 (при расчетах принималось $n = 0$, $\omega = 2\pi$). Зная, например, значения времен t_1 , t_3 , можно получить:

$$r_0 = c_1(t_1 - t_0) = c_R(t_3 - t_0),$$

откуда следует:

$$t_0 = \frac{c_1 t_1 - c_R t_3}{c_1 - c_R}, \quad r_0 = c_1 c_R \frac{\Delta_3}{c_1 - c_R}, \quad \Delta_1 = \frac{c_R \Delta_3}{c_1 - c_R}.$$

Численные расчеты показывают, что ядро интегрального уравнения близко к нулю при $\tilde{t} \leq \tilde{t}_2$, что позволяет сделать вывод о том, что на сейсмограммах фиксация прихода Р-волны затруднена, а реально фиксируются времена прихода SV-волны t_2 и волны Рэлея t_3 . Это позволяет заменить в уравнении (5) время $\bar{t} = t - t_1$ на время $\bar{\bar{t}} = t - t_2$, а Δ_1 на $\Delta_2 = r_0/c_2$, где

$$\Delta_2 = c_R c_2 \frac{\bar{\Delta}_3}{c_2 - c_R}, \quad \bar{\Delta}_3 = t_3 - t_2,$$

что уменьшает интервал интегрирования в уравнении (6):

$$f(\bar{t}) = -\frac{1}{c r_0} P(\bar{t} - \bar{\Delta}_3) + \int_{\bar{t} - \bar{\Delta}_3}^{\bar{t}} \dot{P}(\tau) \bar{u}_z^H(\bar{t} + \Delta_2 - \tau, r_0) d\tau, \quad (8)$$

где

$$\bar{u}_z^H(\tilde{t}, r_0) = \begin{cases} 0, & \tilde{t} \leq \Delta_2, \bar{t} < 0; \\ -\frac{1}{c r_0} - \frac{m_3}{c_2} \sqrt{\frac{k_3 - \gamma^2}{(\bar{\Delta}_3 + \Delta_2)^2 - \tilde{t}^2}}, & \Delta_2 < \tilde{t} < \bar{\Delta}_3 + \Delta_2, 0 < \bar{t} < \bar{\Delta}_3; \\ -\frac{1}{c r_0}, & \tilde{t} \geq \bar{\Delta}_3 + \Delta_2, \bar{t} > \bar{\Delta}_3 \end{cases}$$

Подставляя ядро в интегральное уравнение (8), получим для $\bar{t} > \bar{\Delta}_3$:

$$f(\bar{t}) = -\frac{1}{c r_0} P(\bar{t}) + \int_{\bar{t} - \bar{\Delta}_3}^{\bar{t}} \frac{\dot{P}(\tau) m_3 \sqrt{k_3 - \gamma^2}}{\sqrt{(\bar{\Delta}_3 + \Delta_2)^2 - (\bar{t} + \Delta_2 - \tau)^2}} d\tau. \quad (9)$$

Методические расчеты величины силы $P(t)$ по значениям сейсмограммы $x(t)$, соответствующей заданной силе $P(t)$, что является контрольным примером, показали устойчивость численного алгоритма решения интегральных уравнений (5), (9) [3] (в расчетах принималось $\omega = 2\pi$, $n = 0.1\omega$, $\gamma = 1/\sqrt{3}$, $c_2 = 1$). Выделяется динамическая составляющая силы, отличная от квазистатической и зависящая от значений параметра $\bar{\Delta}_3$, что при $\bar{\Delta}_3 \ll 1$ позволяет приближенно получить аналитическое решение этого уравнения и оценить точность численного алгоритма для решения интегрального уравнения с особенностью типа Абеля. Можно показать, что интегральный член в уравнении (9) зависит от аргумента $\bar{t} - \bar{\Delta}_3$, что позволяет утверждать о квазипериодичности процесса с периодом $\bar{\Delta}_3$. На начальном времен-

ном интервале $[0, \bar{\Delta}_3]$ решается уравнение (5), которое не имеет подвижной особенности в ядре.

Список использованной литературы

1. Герасик В. А., Тищенко В. Н., Шевляков Ю. А. Движение силового источника по упругой поверхности // *Динамические системы*. 1998. №14. с.106-112.
2. Новацкий В. *Теория упругости*. М.: Мир. 1975. 872 с.
3. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. *Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ*. “Наук. думка”, 1978. 292 с.

Поступила в редколлегию 13.07.99