УДК 539.3

Е. Н. Довбня, канд. физ.-мат. наук, Донецкий гос. ун-т

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК С ОТВЕРСТИЯМИ

Рассматривается квадратурная формула для интегралов с логарифмической особенностью, позволяющая использовать метод механических квадратур при решении системы граничных интегральных уравнений с аналогичной особенностью в задачах теории оболочек с отверстиями.

Тонкие оболочки различной конфигурации широко применяются в различных областях современной техники, авиастроении, судостроении, промышленном и гражданском строительстве. Как показывают экспериментальные исследования, наличие концентраторов напряжений (отверстий, трещин, включений и т. п.) существенно влияет на несущую способность конструкций. Так как задачи исследования напряженно-деформированного состояния ортотропных оболочек вблизи отверстий являются очень сложными в математическом отношении, большинство известных решений относятся к оболочкам частного вида (в основном сферическим или цилиндрическим) или получены методом малого параметра и, следовательно, область их применения очень ограничена.

В работе [1] с помощью теории обобщенных функций и двумерного интегрального преобразования Фурье задача о концентрации напряжений в ортотропной оболочке произвольной гауссовой кривизны, ослабленной отверстиями, сведена к системе граничных интегральных уравнений. Неизвестные функции выбираются в относительно простом виде, однако вместо усилий и моментов на контурах отверстий задаются компоненты главного вектора и главного момента нагрузки, действующей вдоль части L_s исходного контура с концом в текущей точке s. В результате в уравнениях отсутствуют неинтегральные добавки, ядра системы граничных интегральных уравнений резко упрощаются. Они регулярны или имеют логарифмическую особенность. Помимо неизвестных функций система интегральных уравнений содержит шесть неизвестных постоянных интегрирования.

Получить точное аналитическое решение указанной системы практически невозможно, поэтому при решении подобного рода задач наиболее целесообразным является применение специальных квадратурных формул.

 ISSN 0203–3755. Динам. системы, 1999, Вып. 15

В работе [2] приведена квадратурная формула для интеграла

$$I(\theta)=\int_0^{2\pi} f(\tau)\,ctg\frac{\tau-\theta}{2}d\tau\,, \qquad 0\le\theta\le 2\pi \qquad (1)$$

где $f(\tau)$ – непрерывная 2π – периодическая функция. Согласно этой квадратурной формуле

$$I(\theta_m)\approx\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{2n} f(\tau_k)\,ctg\frac{\tau_k-\theta_m}{2}\,, \qquad (2)$$

где $\theta=\theta_m=\pi\,(2m-1)/2n+\delta$, $m=\overline{1,2n}$; $\tau_k=\pi k/n+\delta$, $k=\overline{1,2n}$; δ - произвольная постоянная.

Покажем, что при решении системы [1] можно применять аналогичную квадратурную формулу с теми же узлами, что и в квадратурной формуле (2).

В качестве тестовой задачи рассмотрим изотропную пластину постоянной толщины h с круговым отверстием, для которой имеется точное решение [3], полученное другими методами.

Пусть на срединной поверхности пластины (общем случае ортотропной) задана система ортогональных координат x,y с осями вдоль направлений упругой симметрии. Предположим, пластина ослаблена круговым отверстием с контуром L

$$x=\alpha(R\tau)=R\cos(\tau),\quad y=\beta(R\tau)=R\sin(\tau),\tau\in[0,2\pi), \qquad (3)$$

где R – радиус отверстия.

Пластина находится под действием равномерной растягивающей нагрузки вдоль оси $0X$. Компоненты главного вектора и главного момента нагрузки, действующей вдоль части контура отверстия для основного напряженного состояния имеют вид

$$P_x^*=pR\sin\tau;\quad P_y^*=P_z^*=0;\quad M_x^*=M_y^*=0;\quad M_z^*=pR^2\sin^2\tau/2. \qquad (4)$$

Систему граничных интегральных уравнений [1] в рассматриваемом случае можно записать следующим образом

$$\pi^2F_i=\int_0^{2\pi}\sum_{j=1}^{2} f_{ij}\left(\frac{\alpha(R\tau)-\alpha(R\vartheta)}{\chi},\beta(R\tau)-\beta(R\vartheta)\right)\Psi_j(R\vartheta)Rd\vartheta \qquad (5)$$

$$\left(i=\overline{1,2}\right),$$

где

$$f_{11}(x,y)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\chi \sin^2\theta}{l_2^2} d\theta \ln r - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cos 2n\varphi \times \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\chi \sin^2\theta}{l_2^2} \cos 2n\theta d\theta ;$$

$$f_{22}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\chi^{-1} \cos^2\theta}{l_2^2} d\theta \ln r - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cos 2n\varphi \times \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\chi^{-1} \cos^2\theta}{l_2^2} \cos 2n\theta d\theta ; \quad (6)$$

$$f_{12}=f_{21}=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sin 2n\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta\cos\theta}{l_2^2} \sin 2n\theta d\theta ;$$

$\chi=\sqrt[4]{E_1/E_2}$; E_1, E_2 - модули Юнга; $r=\sqrt{x^2+y^2}$; $\varphi = arctg\, y/x$;

$$l_1^2 = 1-\tilde{\mu}(1+\nu)\cos^2 2\theta; l_2^2 = 1+\tilde{\mu}(1-\nu)\cos^2 2\theta;$$

$$\tilde{\mu}=\mu/2a ; \quad 2a = 2-\mu+\mu\nu ; \ \mu = 1-2(1+\nu)G_{12}/E; \quad \nu=\sqrt{\nu_1\nu_2}$$

ν_1, ν_2 - коэффициенты Пуассона; G_{12} - модуль сдвига; $d_{ij}^{(km)}=\frac{1}{n} f_{ij}\left(\frac{\alpha(R\vartheta_m)-\alpha(R\tau_k)}{\chi}, \beta(R\vartheta_m)-\beta(R\tau_k)\right)$.

Ядра (6) системы получены из соответствующих ядер системы [1] с помощью асимптотических формул [4] для функции

$$G_{n,\nu}(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu-n} K_{\nu+n}(z) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k} \frac{\Gamma(\nu+k)}{(n-k)!}\left(\frac{2}{z}\right)^{2k}, \quad (7)$$

$$(n>0, \mathrm{Re}\,\nu>-1).$$

В силу симметрии задачи неизвестные постоянные c_1 и c_2 равны нулю.

Ядра (6) регулярны или имеют логарифмическую особенность. При этом

$$r = 2R\left|\sin\frac{(\tau-\theta)}{2}\right| \sqrt{\chi^{-2}\left(\sin\frac{(\tau+\theta)}{2}\right)^2+\left(\cos\frac{(\tau+\theta)}{2}\right)^2} ;$$

$$\cos\varphi = -\frac{\sin\frac{(\tau+\theta)}{2} \operatorname{sgn}\left(\sin\frac{(\tau-\theta)}{2}\right)}{\chi\sqrt{\chi^{-2}\left(\sin\frac{(\tau+\theta)}{2}\right)^2+\left(\cos\frac{(\tau+\theta)}{2}\right)^2}} ; \quad (8)$$

$$\sin\varphi=\frac{\cos\frac{(\tau+\theta)}{2}\,\mathrm{sgn}\left(\sin\frac{(\tau-\theta)}{2}\right)}{\sqrt{\chi^{-2}\left(\sin\frac{(\tau+\theta)}{2}\right)^2+\left(\cos\frac{(\tau+\theta)}{2}\right)^2}};$$

$$\ln r=\ln 2R\sqrt{\chi^{-2}\left(\sin\frac{(\tau+\theta)}{2}\right)^2+\left(\cos\frac{(\tau+\theta)}{2}\right)^2}+\ln\left|\sin\frac{(\tau-\theta)}{2}\right|.$$

Первое слагаемое представляет собой непрерывную 2π- периодическую функцию, поэтому рассмотрим интеграл

$$I(\theta)=\int_0^{2\pi}\psi(\tau)\ln\left|\sin\frac{\tau-\theta}{2}\right|d\tau\,,\qquad 0\le\theta\le 2\pi\,. \tag{9}$$

Преобразуем его следующим образом

$$I(\theta)=\int_0^{2\pi}f(\tau,\theta)\mathrm{ctg}\frac{\tau-\theta}{2}d\tau\,,\qquad 0\le\theta\le 2\pi \tag{10}$$

где
$$f(\tau,\theta)=\psi(\tau)\mathrm{tg}\frac{\tau-\theta}{2}\ln\left|\sin\frac{\tau-\theta}{2}\right|.$$

Функция $\psi(\tau)$ является непрерывной и 2π периодической. Следовательно, функция $f(\tau,\theta)$ за счет tg и ln имеет разрывы при $\frac{\tau-\theta}{2}=\pi k$ и $\frac{\tau-\theta}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k$. При этом

$$\lim_{\frac{\tau-\theta}{2}\to\pi k}f(\tau,\theta)=\left[z=\frac{\tau-\theta}{2}-\pi k\right]=\psi(\tau)\lim_{z\to 0}tg\,z\,\ln|\sin z|=$$

$$=\psi(\tau)\lim_{z\to 0}\sin z\,\ln|\sin z|=0\,.$$

Таким образом, в указанных точках функцию $f(\tau,\theta)$ можно доопределить по непрерывности по переменной τ. Используя этот факт, по аналогии с доказательством формулы (2), приведенным в работе [2], несложно доказать, что

$$I(\theta_m)\approx\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{2n}f(\tau_k,\theta_m)\,\mathrm{ctg}\frac{\tau_k-\theta_m}{2}\qquad\left(k=\overline{1,2n};\;\; m=\overline{1,2n}\right).$$

Следовательно,

$$I(\theta_m)\approx\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{2n}\;f(\tau_k)\ln\left|\sin\frac{\tau_k-\theta_m}{2}\right|\qquad\left(k=\overline{1,2n};\;\; m=\overline{1,2n}\right). \tag{11}$$

Квадратурная формула (11) аналогична обычной квадратурной формуле для вычисления регулярных интегралов от непрерывных $2\pi-$ периодических функций. Поэтому при использовании метода механических квадратур нет необходимости рассматривать отдельно регулярные и сингулярные части ядер. Таким образом, решение системы граничных интегральных уравнений (5) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений размерности $(4n\times 4n)$

$$\sum_{k=1}^{2n}\sum_{j=1}^{2} y_j^{(k)} a_{ij}^{(k,m)} = \pi F_i(R\vartheta_m), \tag{12}$$

где
$$a_{ij}^{(k,m)} = \frac{1}{n} f_{ij}\left(\frac{\alpha(R\vartheta_m)-\alpha(R\tau_k)}{\chi},\quad \beta(R\vartheta_m)-\beta(R\tau_k)\right);$$

$$y_j^{(k)} = \Psi_j(R\tau_k) \qquad \left(k=\overline{1,2n};\quad m=\overline{1,2n};\quad i=\overline{1,2}\right).$$

Для изотропной пластины $(\nu = 0.3)$ с круговым отверстием в таблице 1 приведены известное в литературе точное решение [3] и результаты приближенного решения системы (4) с использованием квадратурной формулы (11) при $n = 16; 20; 40$.

Таблица

θ	точное решение	n=16	n=20	n=40
$\pi/2$	3.00	3.11286	3.08951	3.04402
0	-1.00	-1.06852	-1.05421	-1.02653

Из данных таблицы следует, что в данном случае метод механических квадратур дает хорошую точность при сравнительно небольшом количестве узлов в квадратурной формуле.

Указанный численный метод также был использован для решения системы граничных интегральных уравнений с логарифмической особенностью [1] при исследовании концентрации напряжений вблизи кругового отверстия в ортотропной сферической оболочке [5]. Для изотропной оболочки численное решение системы [1] методом механических квадратур с помощью квадратурной формулы (11) хорошо согласуется с известными результатами, полученными другими методами [6].

Список использованной литературы

1. Довбня Е. Н. Система граничных интегральных уравнений для ортотропных оболочек положительной кривизны с разрезами и отверстиями // Теорет. и прикл. механика.– 1997.– 26.– С.59-69.
2. Саврук М. П., Осив П. Н., Прокопчук И. В. Численный анализ в плоских задачах теории трещин.– Киев: Наук. Думка, 1989.– 248с.
3. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий.– Киев: Наук. думка, 1968.– 888 с.
4. Хижняк В. К., Шевченко В. П. Смешанные задачи теории пластин и оболочек (Учеб. пособие).– Донецк: Изд-во Донец. ун-та, 1979.– 179с.
5. Довбня Е. Н. Напряженно-деформированное состояние ортотропной оболочки с круговым отверстием // Теорет. и прикл. механика.– 1997.– 27.– С.154-158.
6. Методы расчета оболочек. Т.1 Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями (Гузь А. Н., Чернышенко И. С., Чехов Вал. Н. и др.).– Киев: Наук. думка, 1980.– 636 с.

Поступила в редколлегию 11.04.99