

УДК 539.3: 534.1

В. М. БАЖЕНОВ, канд. физ.-мат. наук доц. Крымский государственный аграрный университет

## ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

Исследуется характер сопряженного поля для некоторых случаев распространения продольных волн в тонких, бесконечно длинных пьезокерамических стержнях, оси которых параллельны оси поляризации  $OZ$ .

Предполагаем, что поверхности стержня свободны от нагрузок, а диэлектрическая проницаемость внешней среды во много раз меньше, чем у материала стержня. В сечениях  $Z = \pm h$  вставлены электроды (рис. 1), – не изменяющие жесткости стержня и не нарушающие его сплошность.

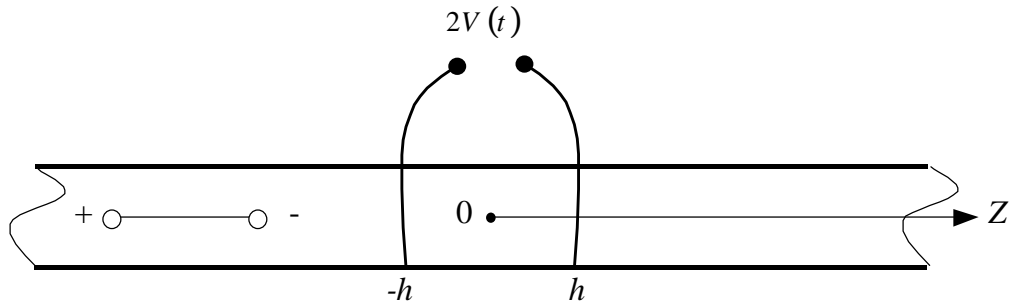


Рис. 1

Рассматриваются задачи по возбуждению импульсов при электрическом нагружении участка  $-h < z < h$  функцией  $V(t)$ ; определению величины, снимаемой электрической энергии при разряде движущегося импульса сжатия и изменению характера волнового движения в стержне, если при прохождении импульса участок между электродами был закорочен.

В такой постановке полная система уравнений задач динамической электроупругости [1] становится одномерной. Выбирая в качестве независимых переменных перемещения  $U = U_z(z, t)$  и электростатический потенциал  $\Psi = \Psi(z, t)$ , сведем поставленные задачи к интегрированию следующей системы уравнений [2]:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \chi \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \quad (1)$$

Здесь  $a$  - скорость распространения продольных электроупругих волн в стержне;  $\chi$  - электроупругий показатель.

Они определяются по формулам

$$a^2 = \frac{1}{s(1-k^2)\rho}; \quad \chi = \frac{d}{s \cdot \varepsilon - d^2} = \frac{k^2}{(1-k^2)d}. \quad (2)$$

В формулах (2) использованы обозначения:

$s = s_{33}^E$  - упругая податливость при нулевом электрическом поле;  $d = d_{33}$  - пьезомодуль;  $\varepsilon = \varepsilon_{33}^T$  - диэлектрическая проницаемость при нулевом напряжении;  $k = k_{33}$  - продольный коэффициент электромеханической связи ( $k^2 = \frac{d^2}{s \cdot \varepsilon}$ );  $\rho$  - плотность пьезоматериала [2].

Дополняя уравнения (1) законом Ома, начальными и граничными ( $z = \pm h$ ;  $z = \pm \infty$ ) условиями для каждого из рассматриваемых случаев, будем получать конкретно сформулированную задачу.

Для решения этих задач применим интегральное преобразование Лапласа [3]. Функции, связанные соотношениями

$$F^*(z, p) = \int_0^{\infty} f(z, t) \cdot e^{-pt} dt \quad (3)$$

$$f(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F^*(z, p) e^{pt} dp, \quad c \geq c_0 > 0$$

назовем изображением и оригиналом. Решения вышеупомянутых задач в области изображений не представляют трудности.

Однако, обратный переход в область оригиналов затруднителен и при исследовании поведения поля на фронте волны и для представления решения в замкнутом виде.

Отыскание искомым функций оригиналов по найденным изображениям во всех задачах распространения волновых импульсов в пьезокерамических стержнях связано с обращением следующей функции:

$$F^*(p) = \frac{1}{p^2 [2p - k^2(1 - e^{-2p})]}. \quad (4)$$

Докажем существование оригинала. Т. к.  $F^*(p)$  мероморфная функция, то ее полюсы  $p = \alpha + i\beta$  - корни уравнения

$$p^2 [2p - k^2(1 - e^{-2p})] = 0 .$$

Исследуем уравнение:

$$2p - k^2(1 - e^{-2p}) = 0 . \quad (5)$$

В области действительных чисел, т. е. при  $\beta = 0$ , левая часть выражения (5) принимает вид  $y(\alpha) = 2\alpha - k^2(1 - e^{-2\alpha})$  и имеет только один экстремум, а именно, минимум при  $\alpha = \ln k$ . Для  $\alpha > \ln k$  будет  $y'(\alpha) > 0$ , значит  $y(\alpha)$  монотонно возрастает, обращаясь в нуль при  $\alpha = 0$ . Следовательно положительных корней (5) не имеет. При  $\alpha < \ln k$ ,  $y'(\alpha) < 0$  и  $y(\alpha)$  убывает, но т. к. выполняется  $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} y(\alpha) = +\infty$ , то есть еще один действительный корень

$$\alpha_0 < \ln k . \quad (6)$$

В комплексной области уравнение (5) эквивалентно следующей системе

$$\left. \begin{aligned} 2\alpha - k^2 + k^2 \cdot e^{-2\alpha} \cdot \cos 2\beta &= 0 \\ 2\beta - k^2 \cdot e^{-2\alpha} \cdot \sin 2\beta &= 0 \end{aligned} \right\}$$

преобразуя которую получим

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{k^2 \sin 2\beta}{2\beta} \right) \\ \ln \left( \frac{k^2 \sin 2\beta}{2\beta} \right) - k^2 + 2\beta \operatorname{ctg} 2\beta &= 0 \end{aligned} \right\} . \quad (7)$$

Для положительных корней ( $\beta_{n+1} > \beta_n$ ) второго уравнения системы (7) получим  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+4n)\pi}{4\beta n} = 1$ . Расчеты, проведенные для керамик разных составов, показывают, что отклонения  $[4\beta n - (1+4n)\pi]$  не пре-

вышают 1% уже для  $n = 3$ , а при  $n > 10$  становится менее 0,1%. Значения  $\alpha_n$  ( $\alpha_{n+1} < \alpha_n$ ) определяются по первому уравнению (7).

Итак  $F^*(p)$  аналитическая функция в области  $\text{Re } p \geq \alpha > 0$ . Т.к. в этой области выполняется  $\lim_{p \rightarrow \infty} F^*(p) = 0$  и сходится интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F^*(\alpha + i\beta)| d\beta,$$

то функция  $F^*(p)$  имеет оригинал [3].

Переход в область оригинала можно осуществить, применяя к формуле обращения (3) теорему о вычетах. Тогда для определения искомой функции  $f(t)$  получим следующее соотношение

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res } F^*(p_n) \cdot e^{-p_n t}.$$

Учитывая связь (7) между действительными  $\alpha_n$  и мнимыми частями  $\beta_n$  исследованных полюсов  $p_n$ , найдем выражение оригинала

$$f(t) = \frac{t^2}{4(1-k^2)} - \frac{k^2 t}{2(1-k^2)} + \frac{(2+k^2)k^2}{6(1-k^2)^3} + \frac{e^{\alpha_0 t}}{2\alpha_0^2(1-k^2+2\alpha_0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \cos \beta_n t + B_n \sin \beta_n t}{C_n} \cdot e^{\alpha_n t}, \quad (8)$$

$$A_n = (\alpha_n^2 - \beta_n^2)(1 - k^2 + 2\alpha_n) - 4\alpha_n \cdot \beta_n,$$

$$B_n = 2\beta_n [(\alpha_n^2 - \beta_n^2) + \alpha_n(1 - k^2 + 2\alpha_n)],$$

$$C_n = (\alpha_n^2 + \beta_n^2)[(1 - k^2 + 2\alpha_n) + 2\beta_n^2].$$

Наличие действительной части ( $\alpha_n \neq 0$ ) у корней частотного уравнения свидетельствует о рассеянии энергии волновых импульсов в рассматриваемых задачах.

Т.к. представление таких характеристик электроупругого поля как  $\sigma = \sigma_z(z, t)$  - составляющая механических напряжений,  $D = D_z(t)$  - компонента вектора электрической индукции будут содержать вторую производную от функции (8), то исследование их поведения с помо-

стью получаемого ряда становится затруднительным, особенно для начального момента времени и при работе поля вблизи волнового фронта из-за медленной сходимости получаемого ряда

Для устранения этого недостатка удобно определить оригинал  $f(t)$ , используя теорему о свертке [3].

Для отыскания оригинала  $f(t)$  вначале представим функцию (4) таким образом

$$F^* = \frac{F_1^*}{F_2^*}, \quad F_1^* = \frac{1}{p^4}, \quad F_2^* = \frac{2}{p} - \frac{k^2}{p^2} (1 - e^{-2p}). \quad (9)$$

Некоторая искусственность записи (9) - деление числителя и знаменателя на величину  $p^2$  объясняется желанием получить для функций  $F_1^*$  и  $F_2^*$  непрерывные оригиналы, которые из (9) находятся элементарно и имеют следующий вид

$$f_1(t) = \frac{t^3}{6}, \quad f_2(t) = 2 - k^2 [t - (t-2) \cdot H(t-2)]. \quad (10)$$

Здесь  $H(t)$  - единичная функция Хевисайда.

Применяя к (10) теоремы о свертке и подобия, получим интегральное уравнение

$$\int_0^t f(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau = f_1(t), \text{ или}$$

$$\int_0^t f(\tau) \cdot \{2 - k^2 [t - \tau - (t - \tau - 2) \cdot H(t - \tau - 2)]\} d\tau = \frac{t^3}{6}.$$

Дважды дифференцируя последнее соотношение по  $t$ , получим следующее дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом

$$f'(t) = \frac{k^2}{2} [f(t) - f(t-2) \cdot H(t-2)] = \frac{t}{2}.$$

Разбивая область интегрирования на интервалы  $(0; 2)$ ,  $(2; 4)$ , ... последовательным интегрированием получим

$$f(t) = \left[ \frac{2}{k^4} \left( e^{\frac{k^2 t}{2}} - 1 \right) - \frac{t}{k^2} \right] \cdot H(t) + \left[ \frac{4}{k^2} \left( e^{\frac{k^2 t}{2}} - 1 \right) - \frac{t-2}{k^2} \left( e^{\frac{k^2(t-2)}{2}} + 1 \right) \right] \cdot H(t-2) + \dots \quad (11)$$

Правая часть соотношения (11) с ростом  $t$  становится громоздкой, поэтому вычислять значения  $f(t)$  по этой формуле для больших  $t$  весьма сложно.

Отметим, что члены ряда в выражении (8) убывают с ростом  $t$  очень быстро и для всех составов пьезокерамики при  $t > 2$  сумма этого ряда не превышает 0,01 % от значений  $f(t)$ . Учитывая выше сказанное, из (8), (11) получим для искомой функции следующую расчетную формулу

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2}{k^4} \left( e^{\frac{k^2 t}{2}} - 1 \right) - \frac{t}{k^2}, & 0 \leq t \leq 2 \\ \frac{t^2}{4(1-k^2)} - \frac{k^2 t}{2(1-k^2)^2} + \frac{(2+k^2)k^2}{6(1-k^2)^3} + \frac{e^{\alpha_0 t}}{2\alpha_0^2(1-k^2+2\alpha_0)}, & t > 2 \end{cases} \quad (12)$$

Для вычисления значений  $f'(t)$  и  $f''(t)$ , содержащихся в выражениях волновых характеристик, можно дифференцировать соотношение (12). Более точные значения этих функций можно получить, дифференцируя (11) для участка  $2 < t < 4$ .

Рассмотрим конкретную задачу. Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  к электронам прикладывается разность потенциалов,

$$\Psi(z = h) - \Psi(z = -h) = -2V_0 \cdot H(t). \quad (13)$$

При этом в неподвижном, свободном от механических и электрических нагрузок стержне возбуждаются сопряженные электроупругие волны, для исследования которых нужно решить систему уравнений (1) с начальными  $U(t=0) = 0$ ,  $\frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$  и граничными (13)

условиями. Добавим к ним условие ненагруженности для компоненты вектора электрической индукции

$$D_z = \frac{d}{s} \frac{\partial U}{\partial z} - (1 - k^2) \epsilon \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0, \quad |z| > h.$$

Учитывая, что возникающие продольные волны в стержне распространяются с конечной скоростью, то для любого фиксированного значения  $t$  получим

$$\lim_{z \rightarrow \infty} U = 0.$$

Это условие с учетом симметрии стержня, относительно  $z$  и замыкает задачу.

Её решение будет таким:

$$U = (1 - k^2) dV_0 \begin{cases} f'(\bar{t} + \bar{z} - 1) - f'(\bar{t} - \bar{z} - 1), & 0 \leq \bar{z} < 1; \\ f'(\bar{t} - \bar{z} + 1) - f'(\bar{t} - \bar{z} - 1), & 1 \leq \bar{z}; \end{cases}$$

$$\Psi = -V_0 \begin{cases} 2\bar{z}f''(\bar{t}) - k^2[f'(\bar{t} + \bar{z} - 1) - f'(\bar{t} - \bar{z} - 1)], & 0 \leq \bar{z} < 1; \\ 2f''(\bar{t}) - k^2[f'(\bar{t} - \bar{z} + 1) - f'(\bar{t} - \bar{z} - 1)], & 1 \leq \bar{z}. \end{cases}$$

Здесь введены безразмерные параметры  $\bar{z} = \frac{z}{h}$ ,  $\bar{t} = \frac{at}{h}$ , в выражениях для производных функции  $f(t)$ .

Отметим, что указанный подход применим и при изучении волнового процесса [2] в составном стержне с активным пьезокерамическим элементом.

### Список использованной литературы

1. Улитко А. Ф. К теории колебаний пьезокерамических тел / Тепловые напряжения в элементах конструкций. - 1975. - Вып. 15. - С. 90-98.
2. Баженов В. М. О возбуждении волновых импульсов в составном стержне с активным пьезокерамическим элементом // Прикл. механика. - 1989. - 25, № 5. - С. 90-97.
3. Мартыненко В. С. Операционное исчисление. - К.: Вища шк., 1973. - 268 с.

Поступила в редколлегию 12.09.98