УДК 539.3: 534.1

В. М. БАЖЕНОВ, канд. физ.-мат. наук, доцент, Крымский гос. аграр. ун-т,
И. А. УЛИТКО, м.н.с., Киевский гос. ун-т им. Т. Г. Шевченко

К ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАЗРЯДА ИМПУЛЬСНЫХ ПЬЕЗОГЕНЕРАТОРОВ

На основе точного решения сопряженных уравнений динамической электроупругости получены значения удельной электрической энергии, снимаемой при мгновенных разрядах одноосно деформируемых пьезоэлементов, возбуждаемых ударом. Исследована динамика волнового процесса.

Пьезокерамические материалы широко применяются в качестве активных элементов импульсных (искровых) генераторов электрической энергии. Пьезоэлементы ударного действия используются для зажигания газов и легко воспламеняющихся смесей [1,2].

Обеспечение надежности и эффективности работы пьезогенераторов требует детального изучения нестационарных процессов, протекающих в пьезоэлементах. Однако в известных публикациях практически отсутствуют исследования таких задач [3]. В частности, не освещено наблюдаемое на практике явление многократно повторяющихся разрядов при ударном возбуждении пьезоэлемента [2].

Пусть пьезокерамический слой толщины $2h$, предварительно поляризованный по толщине, находился в ненагруженном состоянии. В начальный момент $t=0$ к его граням $z=\pm h$ мгновенно прикладываются равномерно распределенные механические напряжения

$$\sigma_z\big|_{z=\pm h}=-\sigma_0, \quad t>0. \tag{1}$$

Электроды, полностью покрывающие грани слоя, предполагаются разомкнутыми, следовательно, для нормальной составляющей вектора электрической индукции на поверхностях слоя выполняется [1,4]

$$\mathcal{D}_z\big|_{z=\pm h}=0. \tag{2}$$

Возбуждаемое при механическом ударе, т.е. под действием мгновенно возникшей разности напряжений на гранях (1) и внутренних точках $(\sigma_z=0)$ слоя $\Delta_0=-\sigma_0$, волновое поле описывается уравнениями [4]

$$\sigma_z = c_{33}^E \mathscr{E}_z - e_{33} E_z = c_{33}^E \frac{\partial U_z}{\partial z} + e_{33} \frac{\partial \Psi}{\partial z},$$
$$\mathscr{D}_z = \varepsilon_{33}^S E_z + e_{33} \mathscr{E}_z = -\varepsilon_{33}^S \frac{\partial \Psi}{\partial z} + e_{33} \frac{\partial U_z}{\partial z}, \tag{3}$$
$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 U_z}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathscr{D}_z}{\partial z} = 0.$$

Здесь $U_z(z,t)$, $\mathscr{E}_z(z,t)$ – соответственно составляющие механических перемещений и деформаций в направлении оси oz; $E_z(z,t)$ и $\Psi_z(z,t)$ компонента вектора напряженности и скалярный потенциал электрического поля; ρ – плотность пьезокерамического материала; c_{33}^E – модуль упругости при нулевом электрическом поле; e_{33} – пьезомодуль; ε_{33}^S – диэлектрическая проницаемость при нулевой деформации; t – координата времени.

Из условия разомкнутости электродов (2) и равенств (3) следует пропорциональность механических напряжений σ_z, деформаций $\mathscr{E}_z$ и напряженности электрического поля E_z. Значит, отыскание неизвестных по соотношениям (1)–(3) с учетом начальной ненагруженности сводится к решению известного волнового уравнения толщинных колебаний слоя

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial t^2} \tag{4}$$

Таким образом, при мгновенном механическом нагружении слоя от его граней начнут распространяться импульсы механических напряжений $\sigma_z = \Delta_0 = -\sigma_0$ со скоростью сопряженной продольной волны $a = \sqrt{c_{33}^E / \rho (1 - k_t^2)}$, ($k_t^2 = e_{33}^2 / (e_{33}^2 + c_{33}^E \varepsilon_{33}^S)$ – квадрат толщинного коэффициента электромеханической связи).

В момент времени $t_1 = 2h/a$ импульсы пройдут толщину слоя и его состояние, на основании (1)–(4) характеризуется значениями

$$\sigma_z = 2\Delta_0, \quad \mathscr{E}_z = 2(1 - k_t^2)\Delta_0 / c_{33}^E, \quad E_z = -2k_t^2 \Delta_0 / e_{33}, \quad \mathscr{D}_z = 0 \tag{5}$$

В этот момент, когда разность потенциалов между электродами будет наибольшей

$$\Psi(z = h) - \Psi(z = -h) = 4k_t^2 \cdot \frac{h}{e_{33}} \cdot \Delta_0$$

произведем мгновенный разряд – короткое замыкание слоя.

Удельная (снимаемая с единичной площади) энергия этого разряда, вычисленная по формуле простого конденсатора, будет равна

$$W^{(1)} = 4k_t^2\left(1-k_t^2\right)\cdot\frac{h}{c_{33}^E}\cdot\Delta_0^2 \tag{6}$$

а поле в слое с замкнутыми электродами ($\mathcal{D}_z \neq 0$) в первый момент после разряда $t = t_1 + 0$ на основании (1), (3), (5) – таким

$$\begin{aligned} &\sigma_{z,1} = 2\left(1-k_t^2\right)\Delta_0, \quad |z| < h; \qquad \mathcal{E}_{z,1} = 2\left(1-k_t^2\right)\Delta_0 / c_{33}^E; \\ &E_{z,1} = 0; \qquad \mathcal{D}_{z,1} = 2\left(1-k_t^2\right)\cdot e_{33}\Delta_0 / c_{33}^E. \end{aligned} \tag{7}$$

Последующее волновое движение определяется мгновенно возникающей разностью напряжений на гранях (1) и во внутренних (7) точках слоя, т.е. значением

$$\Delta_1 = \Delta_0 - 2\left(1-k_t^2\right)\Delta_0 = -\left(1-2k_t^2\right)\Delta_0. \tag{8}$$

Отметим, что после этого разряда в отличии от случая, описанного в работе [5], при $k_t^2 = 0{,}5$ дальнейшее движение слоя отсутствует.

Предполагая, что после пробоя электроды будут разомкнуты, решение уравнений (3) ищем в виде

$$\begin{aligned} &\sigma_z = \sigma_{z,1} + \sigma_z^{(1)}(z,t), \qquad \mathcal{E}_z = \mathcal{E}_{z,1} + \mathcal{E}_z^{(1)}(z,t), \\ &E_z = E_z^{(1)}(z,t), \qquad \mathcal{D}_z = \mathcal{D}_{z,1} + \mathcal{D}_z^{(1)}(z,t). \end{aligned} \tag{9}$$

Так как сразу после разряда дополнительного поля ($\sigma_z^{(1)}, \sigma_z^{(1)}$, ...) не было, то для него справедливы соотношения (2)–(4). Значит, после размыкания электродов ($t = t_1 + 0$) от граней слоя пройдут импульсы $\sigma_z^{(1)} = \Delta_1$ и в момент времени $t_2 = t_1 + 2h/a = 4h/a$ дополнительное поле станет следующим

$$\begin{aligned} &\sigma_z^{(1)} = 2\Delta_1, \quad \mathcal{E}_z^{(1)} = 2\left(1-k_t^2\right)\cdot\Delta_1 / c_{33}^E, \\ &E_z^{(1)} = -2k_t^2\cdot\Delta_1 / e_{33}, \qquad \mathcal{D}_z^{(1)} = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

а разность потенциалов – наибольшей

$$\Psi(z=h) - \Psi(z=-h) = 4k_t^2\cdot\frac{h}{e_{33}}\cdot\Delta_0 = 4k_t^2\left(1-2k_t^2\right)\frac{h}{e_{33}}\sigma_0. \tag{11}$$

Обычно после первого разряда проводимость искрового промежутка некоторое время остается чуть выше чем до разряда. Поэтому может наступить пробой на разности потенциалов (11).

Удельная энергия этого разряда будет равна

$$W^{(2)} = 4k_t^2\left(1-k_t^2\right)\cdot\frac{h}{c_{33}^E}\cdot\Delta_1^2, \qquad (12)$$

а поле сразу после разряда ($t = t_2 + 0$) – таким

$$\sigma_{z,2} = \sigma_{z,1} + 2\left(1-k_t^2\right)\Delta_1, \quad |z| < h; \qquad \mathscr{E}_{z,2} = \mathscr{E}_{z,1} + 2\left(1-k_t^2\right)\Delta_1 / c_{33}^E;$$

$$E_{z,2} = 0; \qquad \mathscr{D}_{z,2} = \mathscr{D}_{z,1} + 2\left(1-k_t^2\right)\cdot e_{33}\Delta_1 / c_{33}^E.$$

Как и после первого разряда дальнейшее движение слоя осуществляется под действием разности напряжений.

Аналогично поступая для n-ого разряда получим:

$$\Delta_n = -\left(1-2k_t^2\right)\Delta_{n-1} = (-1)^{n+1}\left(1-2k_t^2\right)^n\sigma_0;$$

$$\Psi(z=h) - \Psi(z=-h) = 4k_t^2\cdot\frac{h}{e_{33}}\cdot\Delta_{n-1}, \qquad t = t_0 - 0 = 2hn/a - 0;$$

$$W^{(n)} = 4k_t^2\left(1-k_t^2\right)\cdot\frac{h}{c_{33}^E}\cdot\Delta_{n-1}^2 = 4k_t^2\left(1-k_t^2\right)\left(1-2k_t^2\right)^{2n-2}h\sigma_0^2 / c_{33}^E;$$

$$\sigma_{z,n} = \sigma_{z,n-1} + 2\left(1-k_t^2\right)\Delta_{n-1} = -\left[1+(-1)^{n-1}\left(1-2k_t^2\right)^n\right]\sigma_0,$$

$$\mathscr{E}_{z,n} = \mathscr{E}_{z,n-1} + 2\left(1-k_t^2\right)\frac{\Delta_{n-1}}{c_{33}^E} = -\left[1+(-1)^{n-1}\left(1-2k_t^2\right)^n\right]\frac{\sigma_0}{c_{33}^E};$$

$$E_{z,n} = 0$$

$$\mathscr{D}_{z,n} = \mathscr{D}_{z,n-1} + 2\left(1-k_t^2\right)\cdot e_{33}\frac{\Delta_{n-1}}{c_{33}^E} = -\left[1+(-1)^{n-1}\left(1-2k_t^2\right)^n\right]\cdot e_{33}\frac{\sigma_0}{c_{33}^E}$$

Предельные значения поля ($n \to \infty$, $k_t^2 > 0$) станут следующими

$$\mathscr{E}_z = -\frac{\sigma_0}{c_{33}^E}, \quad \sigma_z = -\sigma_0, \quad E_z = 0, \quad \mathscr{D}_z = -\frac{e_{33}\sigma_0}{c_{33}^E} \qquad (14)$$

Суммируя энергии всех разрядов, находим

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} W^{(n)} = \frac{h\sigma_0^2}{c_{33}^E} \tag{15}$$

Конечный результат, представленный формулами (14), (15) в отличии от задачи повторных разрядов статически сжатого пьезослоя [5], не зависит от величины коэффициента электромеханической связи (КЭМС). Суммарная энергия и характеристики поля здесь принимают значения в k_t^{-2} раз большие, чем в статическом случае.

Так как задачи одноосной деформации пьезокерамических тел описываются уравнениями, отличающимися от уравнения (3) лишь значениями постоянных (например, распространение продольных импульсов в длинном пьезокерамическом стержне [6]), то все результаты данной работы могут использоваться для исследования повторных разрядов любых одноосно деформируемых пьезоэлементов.

В частности, для разности потенциалов и энергии разрядов стержня длины $2h$ соответственно для n-ого разряда имеем

$$\Psi(z=h) - \Psi(z=-h) = (-1)^n 4k_{33}^2 \left(1-2k_{33}^2\right)^{n-1} \cdot s_{33}^E \frac{h\sigma_0}{d_{33}};$$

$$W^{(n)} = 4k_{33}^2 \left(1-k_{33}^2\right)\left(1-2k_{33}^2\right)^{2n-2} s_{33}^E h\sigma_0^2. \tag{16}$$

Здесь: s_{33}^E – упругая податливость при нулевом электрическом поле, d_{33} – пьезоэлектрическая постоянная, k_{33} – продольный коэффициент электромеханической связи.

Анализируя полученные результаты заметим, что высокоэффективные составы со значительным значением КЭМС (идеальный вариант $k^2 = 0{,}5$) следует использовать в генераторах где требуется получение высоких напряжений и где последующий волновой процесс нежелателен. Так для стержня высоты $2h = 0{,}05\,м$, керамика состава $PZT-4$ [7] ($k_{33}^2 \approx 0{,}47$) при нагружении напряжениями $\sigma_0 = 10^5\ н/м^2$ по формуле (16) для первого разряда получим

$$\Psi(z=h) - \Psi(z=-h) \approx 250\,в. \tag{17}$$

Второго и последующего разрядов здесь наблюдаться не будет, т.к. максимальная разность потенциалов, появляющаяся после первого разряда, составит $\approx 6\%$ от величины (17).

При малых значениях КЭМС разность потенциалов и энергия разрядов от последующего к предыдущему убывает незначительно. Так для стержня состава $Cd\,S$ [7] ($k_{33}^2 \approx 0{,}069$) разность потенциалов второго разряда составляет $\approx 86\%$ от величины первого, а для слоя

$(k_{33}^2 \approx 0{,}024) \approx 95\%$. Поэтому для получения нескольких искровых разрядов при одном возбуждении пьезоэлемента (например, для обеспечения надежности в зажигании газовых смесей) следует подбирать керамику с малым значением КЭМС.

Список использованной литературы

1. Улитко А. Ф. К теории колебаний пьезокерамических тел. / Тепловые напряжения в элементах конструкций. Вып. 15, К., «Наукова думка», 1975, С. 90–98.
2. Яффе Б., Кук У., Яффе Г. Пьезоэлектрическая керамика. М.,«Мир», 1974, 288 с.
3. Жарий О. Ю., Улитко А. Ф. К теории электрического разряда произвольно деформируемых пьезоэлектрических тел. // ДАН УССР, сер. А, 1979, №11, С. 813–818.
4. Баженов В. М., Улитко А. Ф. Определение высвобождаемой электрической энергии при мгновенном разряде пьезокерамического слоя. // Прикл. механика, 1975, 11, №12, С. 67–74.
5. Баженов В. М. Исследование электрической энергии мгновенных разрядов статически сжатого пьезокерамического слоя. // ДАН УССР, сер. А, 1977, №11, С. 995–998.
6. Баженов В. М. Поведение длинного пьезокерамического стержня при прохождении импульсов через закороченный участок. // Вестник АН Каз. ССР, 1979, №5, С. 65–67.
7. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях.– / кн.: Физическая акустика. Т.1,ч.А (под ред. У. Мэзона). М., «Мир», 1966, С. 204–326.

Поступила в редколлегию 18.05.99