

УДК 513.777

О. В. АВРАМЕНКО, канд. физ.-мат. наук, Ин-т гидромеханики НАНУ
И. Т. СЕЛЕЗОВ, д-р физ.-мат. наук, Ин-т гидромеханики НАНУ

ТРАНСФОРМАЦИЯ ИМПУЛЬСА ДАВЛЕНИЯ В УПРУГОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ОБОЛОЧКЕ, ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Исследуется влияние упругой вставки конечной длины в упругой оболочке, заполненной жидкостью, на распространение импульса давления, который инициируется на некотором расстоянии от вставки. Для решения соответствующей математической задачи применяется интегральное преобразование Лапласа. После получения аналитических решений в каждой из областей гидроупругой системы, удовлетворяющей условиям сопряжения, обращение преобразования Лапласа проводится численно. Представлен детальный количественный и качественный анализ влияния геометрических параметров вставки и оболочки на распределение давления в жидкости, радиального перемещения, изгибающих моментов и перерезывающих сил. Показано, что при прохождении импульса давления в стыках вставки с оболочкой имеет место сильно локализованная концентрация напряжений и она на несколько порядков выше по сравнению с однородной оболочкой.

В настоящей статье рассматривается задача распространения волн в упругой кусочно-однородной оболочке, заполненной жидкостью, состоящей из двух полубесконечных оболочек с упругой вставкой конечной длины между ними. Ранее была рассмотрена задача, в которой исследовалось влияние стыка двух полубесконечных упругих оболочек с различными геометрическими параметрами [1,5].

Задача рассматривается в четырех областях

$$\begin{aligned}\Omega'_1 &= \{(x, r) : -\infty < x \leq x_0, r \leq r_i^1 + h_1\}, \\ \Omega_1 &= \{(x, r) : x_0 < x \leq x_1, r \leq r_i^1 + h_1\}, \\ \Omega &= \{(x, r) : x_1 < x \leq x_2, r \leq r_i + h\}, \\ \Omega_2 &= \{(x, r) : x_2 \leq x < \infty, r \leq r_i^2 + h_2\}.\end{aligned}$$

Соответствующая начально-краевая задача формулируется для заданного при $t = 0$ импульса давления, приложенного в поперечном сечении $x = x_0$. В области Ω'_1 , которая расположена слева от места приложения импульса, волна распространяется влево, в то время как в области Ω_1 , расположенной правее места приложения импульса, волна распространяется вправо до места стыка $x = x_1$ областей Ω_1 и Ω , после чего в Ω_1

порождается и распространяется отраженная волна. В области Ω распространяется проходящая волна, которая, в свою очередь, порождает отраженную волну в область Ω от места стыка $x = x_2$ областей Ω и Ω_2 и проходящую волну в полубесконечную область Ω_2 . Все величины в левых областях Ω'_1, Ω_1 и в правой области Ω_2 помечены штрихом и индексами 1 и 2, соответственно. Величины из области вставки Ω индексов не имеют.

Математическая постановка задачи записывается в виде [2, 4]

$$\xi_1^2 \frac{\partial^4 w'_1}{\partial x^4} + w'_1 + \frac{\partial^2 w'_1}{\partial t^2} = p_i'^h, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 w'_1}{\partial t^2} = \frac{(1-0.5\xi)}{2} \frac{\rho_1}{\rho_f} \frac{\partial^2 \hat{p}'_1}{\partial x^2} \quad \text{в} \quad \Omega'_1 \quad (2)$$

$$p_i'^h = \hat{p}'_1 - \frac{1}{8}(1-0.5\xi)^2 \frac{\partial^2 \hat{p}'_h}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u'_1}{\partial t} = -\frac{\rho_1}{\rho_f} \frac{\partial \hat{p}'_1}{\partial x}, \quad (3)$$

$$\xi_1^2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + w_1 + \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = p_i^1, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = \frac{(1-0.5\xi)}{2} \frac{\rho_1}{\rho_f} \frac{\partial^2 \hat{p}_1}{\partial x^2} \quad \text{в} \quad \Omega'_1 \quad (5)$$

$$p_i^h = \hat{p}_1 - \frac{1}{8}(1-0.5\xi)^2 \frac{\partial^2 \hat{p}_1}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{\rho_1}{\rho_f} \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial x}, \quad (6)$$

$$\xi_1^2 \left(\frac{h}{h_1} \right)^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left(\frac{a_1^0}{a^0} \right)^2 w + \frac{\rho}{\rho_1} \frac{E}{E_2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{h_1 E_1}{h E} p_i, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{a^0}{a_1^0} - 0.5 \frac{h}{h_1} \xi \right) \frac{\rho_2}{\rho_1} \xi \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x^2} \quad \text{в} \quad \Omega \quad (8)$$

$$p_i = \hat{p} - \frac{1}{8} \left(\frac{a^0}{a_1^0} - 0.5 \frac{h}{h_1} \xi \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\rho_1}{\rho_f} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x}. \quad (9)$$

$$\xi_1^2 \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + \left(\frac{a_1^0}{a_2^0} \right)^2 w_2 + \frac{\rho_2 E_1}{\rho_1 E_2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} = \frac{h_1 E_1}{h_2 E} p_i^2, \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{a_0^2}{a_1^0} - 0.5 \frac{h_2}{h_1} \xi \right) \frac{\rho_1}{\rho_f} \xi \frac{\partial^2 \hat{p}_2}{\partial x^2} \quad \text{в } \Omega_2 \quad (11)$$

$$p_i^2 = \hat{p}_2 - \frac{1}{8} \left(\frac{a_2^0}{a_1^0} - 0.5 \frac{h_2}{h_1} \xi \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{p}_2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = - \frac{\rho_1}{\rho_f} \frac{\partial \hat{p}_2}{\partial x}. \quad (12)$$

Условия сопряжения

на поверхности $x = x_0$

$$\hat{p}'_1 - f(t) = \hat{p}_1, \quad u'_1 = u_1, \quad w' = w_1, \quad \frac{\partial w'_1}{\partial x} = \frac{\partial w_1}{\partial x}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 w'_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 w'_1}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3}$$

на поверхности $x = x_1$

$$\hat{p}_1 = \hat{p}, \quad u_1 = u_1, \quad w_1 + 1 = w + \frac{a^0}{a_1^0}, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = \frac{E}{E_1} \left(\frac{h}{h_1} \right)^3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} = \frac{E}{E_1} \left(\frac{h}{h_1} \right)^3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3},$$

на поверхности $x = x_2$

$$\hat{p} = \hat{p}_2, \quad u = u_2, \quad w + \frac{a^0}{a_1^0} = w_2 + \frac{a_2^0}{a_1^0}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_2}{\partial x}, \quad (15)$$

$$\frac{E}{E_1} \left(\frac{h}{h_1} \right)^3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{E_2}{E_1} \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \frac{E}{E_1} \left(\frac{h}{h_1} \right)^3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = \frac{E_2}{E_1} \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^3 \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3},$$

Каждая искомая функция $s(x, t)$ в левой Ω'_1 и правой Ω_2 областях должна удовлетворять также следующим условиям

$$|s(x, t)| \rightarrow 0, \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Начальные условия имеют вид

$$s(x,t)|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial s(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad (17)$$

Обозначения введены следующим образом (индексы 1,2 и штрих не приводятся): x – осевая координата; r – радиальная координата; t – время; w – радиальное смещение оболочки; \hat{p} – среднее значение давления вдоль сечения; $p_i|_{r=r_i} = q$ – радиальное давление на стенку оболочки; u – средняя скорость; r_i – внутренний радиус оболочки; a^0 – радиус срединной поверхности оболочки; h – толщина оболочки; E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона; ρ_f – плотность жидкости; ρ – плотность материала стенок сосудов; $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ – изгибная жесткость; $M_x = m = D\partial^2 w/\partial x^2$ – изгибающий момент; $Q_x = q = D\partial^3 w/\partial x^3$ – перерезывающая сила; $f(t)$ – импульс давления; $\xi = h/a$ – относительная толщина.

Всюду введены следующие безразмерные величины (звездочки опускаются):

$$(x^*, r^*, w^*) = (x, r, w)/a_1^0, \quad t^* = t \frac{1}{a_1^0} \sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}}, \quad (u_1^*, u_2^*) = (u_1, u_2) \frac{1}{\xi} \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}}, \quad (18)$$

$$(p_i^{1*}, p_i^{2*}, \hat{p}_1^*, \hat{p}_2^*, f^*) = (p_i^1, p_i^2, \hat{p}_1, \hat{p}_2, f)/\xi E_1.$$

и безразмерные параметры:

$$\xi = \frac{h_1}{a_1}, \quad \xi_1^2 = \frac{\xi^2}{12(1-\nu^2)}, \quad \frac{a_2^0}{a_1^0}, \quad \frac{h_2}{h_1}, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad \frac{E_2}{E_1}.$$

Заметим, что во всех формулах в соответствии с введенными безразмерными величинами $a^* = 1$ и $\rho_f^* = 1$.

Граничные условия (13) – (15) выражают скачок давления при $x = x_0$ и непрерывность давления в местах стыка $x = x_1$ и $x = x_2$, а также непрерывность скоростей, радиальных перемещений оболочки и их производных, изгибающих моментов и перерезывающих сил, направленных радиально в стыках.

Решение получено методом интегрального преобразования Лапласа с последующим обращением на основе разложения неизвестных

функций в ряд Фурье [4]. Преобразование Лапласа производится по формулам для произвольной функции $s(x, t)$

$$S(x, \tau) = \int_0^{\infty} s(x, t) e^{-\tau t} dt, \quad s(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} S(x, \tau) e^{\tau t} d\tau. \quad (19)$$

В соответствии с (19) уравнения (1) – (12) с учетом начальных условий (17) приводятся к виду

$$\xi_1^2 \frac{d^4 W_1'}{dx^4} + (1 + \tau^2) W_1' = P_i^1, \quad (20)$$

$$\tau^2 W_1' = \frac{(1 - 0.5\xi)}{2} \frac{\rho_1}{\rho_f} \xi \frac{d^2 \hat{P}_1'}{dx^2} \quad \text{в} \quad \Omega_1' \quad (21)$$

$$P_i^{1h} = \hat{P}_1' - \frac{1}{8} (1 - 0.5\xi)^2 \frac{d^2 \hat{P}_1'}{dx^2}, \quad U_1' = -\frac{1}{\tau} \frac{\rho_1}{\rho_f} \frac{d \hat{P}_1'}{dx}, \quad (22)$$

$$\xi_1^2 \frac{d^4 W_1}{dx^4} + (1 + \tau^2) W_1 = P_i^1, \quad (23)$$

$$\tau^2 W_1 = \frac{(1 - 0.5\xi)}{2} \frac{\rho_1}{\rho_f} \frac{d^2 \hat{P}_1}{dx^2} \quad \text{в} \quad \Omega_1' \quad (24)$$

$$P_i^1 = \hat{P}_1 - \frac{1}{8} (1 - 0.5\xi)^2 \frac{d^2 \hat{P}_1}{dx^2}, \quad U_1 = -\frac{1}{\tau} \frac{\rho_1}{\rho_f} \frac{d \hat{P}_1}{dx}, \quad (25)$$

$$\xi_1^2 \frac{E}{E_1} \left(\frac{h}{h_1} \right)^3 \frac{d^4 W}{dx^4} + \left[\left(\frac{E}{E_1} \frac{h}{h_1} \frac{a_1^0}{a^0} \right)^2 + \frac{\rho}{\rho_f} \frac{\rho_f}{\rho_1} \frac{h}{h_1} \tau^2 \right] W = P_i, \quad (26)$$

$$\tau^2 W = \frac{1}{2} \left(\frac{a^0}{a_1^0} - 0.5 \frac{h}{h_1} \xi \right) \frac{\rho_1}{\rho_f} \xi \frac{d^2 \hat{P}}{dx^2} \quad \text{в} \quad \Omega \quad (27)$$

$$P_i = \hat{P} - \frac{1}{8} \left(\frac{a^0}{a_1^0} - 0.5 \frac{h}{h_1} \xi \right)^2 \frac{d^2 \hat{P}}{dx^2}, \quad U = -\frac{1}{\tau} \frac{\rho_1}{\rho_f} \frac{d \hat{P}}{dx}. \quad (28)$$

$$\xi_1^2 \frac{E_2}{E_1} \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^3 \frac{d^4 W_2}{dx^4} + \left[\left(\frac{E_2 h_2 a_1^0}{E_1 h_1 a_2^0} \right)^2 + \frac{\rho_2 \rho_f h_2 \tau^2}{\rho_f \rho_1 h_1} \right] W_2 = P_i^2, \quad (29)$$

$$\tau^2 W_d = \frac{1}{2} \left(\frac{a_2^0}{a_1^0} - 0.5 \frac{h_2}{h_1} \xi \right) \frac{\rho_1}{\rho_f} \xi \frac{d^2 \hat{P}_2}{dx^2} \quad \text{в} \quad \Omega_2 \quad (30)$$

$$P_i^2 = \hat{P}_2 - \frac{1}{8} \left(\frac{a_2^0}{a_1^0} - 0.5 \frac{h_2}{h_1} \xi \right)^2 \frac{d^2 \hat{P}_2}{dx^2}, \quad U_2 = -\frac{1}{\tau} \frac{\rho_1}{\rho_f} \frac{d\hat{P}_2}{dx}. \quad (31)$$

Условия сопряжения (13) – (15) приводятся к виду на поверхности $x = x_0$

$$\begin{aligned} \hat{P}'_1 - F(t) &= \hat{P}_1, \quad U'_1 = U_1, \quad W' = W_1, \quad \frac{dW'_1}{dx} = \frac{dW_1}{dx}, \\ \frac{d^2 W'_1}{dx^2} &= \frac{d^2 W_1}{dx^2}, \quad \frac{d^3 W'_1}{dx^3} = \frac{d^3 W_1}{dx^3} \end{aligned} \quad (32)$$

на поверхности $x = x_1$

$$\begin{aligned} \hat{P}_1 &= \hat{P}, \quad U_1 = U, \quad W_1 + 1 = W + \frac{a^0}{a_1^0}, \quad \frac{dW_1}{dx} = \frac{dW}{dx}, \\ \frac{d^2 W_1}{dx^2} &= \frac{E}{E_1} \left(\frac{h}{h_1} \right)^3 \frac{d^2 W}{dx^2}, \quad \frac{d^3 W_1}{dx^3} = \frac{E}{E_1} \left(\frac{h}{h_1} \right)^3 \frac{d^3 W}{dx^3}, \end{aligned} \quad (33)$$

на поверхности $x = x_2$

$$\begin{aligned} \hat{P} &= \hat{P}_2, \quad U = U_2, \quad W + \frac{a^0}{a_1^0} = W_2 + \frac{a_2^0}{a_1^0}, \quad \frac{dW}{dx} = \frac{dW_2}{dx}, \\ \frac{E}{E_1} \left(\frac{h}{h_1} \right)^3 \frac{d^2 W}{dx^2} &= \frac{E_2}{E_1} \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^3 \frac{d^2 W_2}{dx^2}, \quad \frac{E}{E_1} \left(\frac{h}{h_1} \right)^3 \frac{d^3 W}{dx^3} = \frac{E_2}{E_1} \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^3 \frac{d^3 W_2}{dx^3}, \end{aligned} \quad (34)$$

После некоторых преобразований приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно $\hat{P}'_1, \hat{P}_1, \hat{P}, \hat{P}_2$

$$\frac{d^6 \hat{P}'_1}{dx^6} + a_1 \frac{d^2 \hat{P}'_1}{dx^2} + a_2 \hat{P}'_1 = 0, \quad (35)$$

$$\frac{d^6 \hat{P}_1}{dx^6} + a_1 \frac{d^2 \hat{P}_1}{dx^2} + a_2 \hat{P}_1 = 0, \quad (36)$$

$$\frac{d^6 \hat{P}}{dx^6} + q_1 \frac{d^2 \hat{P}}{dx^2} + q_2 \hat{P} = 0, \quad (37)$$

$$\frac{d^6 \hat{P}_2}{dx^6} + b_1 \frac{d^2 \hat{P}_2}{dx^2} + b_2 \hat{P}_2 = 0, \quad (38)$$

где $a_1, a_2, b_1, b_2, q_1, q_2$ зависят от τ и безразмерных параметров, имеют громоздкий вид и здесь не приводятся. Соответствующие характеристические уравнения являются бикубическими и корни их могут быть найдены с помощью формул Кардано. Анализ обнаруживает, что имеется пара действительных корней с противоположными знаками и две пары комплексно сопряженных корней. Обозначим их $\pm l_1, \pm l_2, \pm l_3$, для (35), (36), $\pm b_1, \pm b_2, \pm b_3$, для (37) и $\pm g_1, \pm g_2, \pm g_3$, для (38), где $l_1, b_1, g_1 > 0$ и l_i, d_i, g_i ($i = 2, 3$) имеют положительные действительные части.

В соответствии с проведенным анализом решения уравнений (35) – (37) представляются в виде

$$\begin{aligned} \hat{P}'_1 &= C_{10}(\tau)e^{l_1 x} + C_{11}(\tau)e^{l_2 x} + C_{12}(\tau)e^{l_3 x}, \\ \hat{P}_1 &= C_4(\tau)e^{l_1 x} + C_5(\tau)e^{l_2 x} + C_6(\tau)e^{l_3 x} + \\ &+ C_7(\tau)e^{-l_1 x} + C_8(\tau)e^{-l_2 x} + C_9(\tau)e^{-l_3 x}, \\ \hat{P} &= C_{13}(\tau)e^{d_1 x} + C_{14}(\tau)e^{d_2 x} + C_{15}(\tau)e^{d_3 x} + \\ &+ C_{16}(\tau)e^{-d_1 x} + C_{17}(\tau)e^{-d_2 x} + C_{18}(\tau)e^{-d_3 x}, \\ \hat{P}_2 &= C_1(\tau)e^{-g_1 x} + C_2(\tau)e^{-g_2 x} + C_3(\tau)e^{-g_3 x}. \end{aligned} \quad (39)$$

Учитывая соотношения (21), (24), (27), (30), а также формулы $M = D\partial^2 W / \partial x^2$ и $Q = D\partial^3 W / \partial x^3$, после несложных преобразований можно получить выражения для радиальных перемещений, изгибающих моментов и перерезывающих сил в пространстве образов интегрального преобразования Лапласа через неизвестные постоянные $C_i(\tau)$ ($i = \overline{1, 18}$). Приведем здесь выражения для радиальных перемещений, изгибающих моментов и перерезывающих сил в области вставки Ω

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2} \left(\frac{a^0}{a_1^0} - 0.5 \frac{h}{h_1} \xi \right) \frac{\rho_1}{\rho_f} \xi \frac{1}{\tau^2} \times \\
 &\quad \times \left(C_{13}(\tau) l_1^2 \exp(d_1 x) + C_{14}(\tau) d_2^2 \exp(d_2 x) + C_{15}(\tau) l_3^2 \exp(d_3 x) + \right. \\
 &\quad \left. + C_{16}(\tau) d_1^2 \exp(-d_1 x) + C_{17}(\tau) d_2^2 \exp(-d_2 x) + C_{18}(\tau) d_3^2 \exp(-d_3 x) \right), \\
 M &= \frac{1}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{2} \left(\frac{a^0}{a_1^0} - 0.5 \frac{h}{h_1} \xi \right) \frac{\rho_1}{\rho_f} \frac{E}{E_1} \left(\frac{h}{h_1} \right)^3 \xi \frac{1}{\tau^2} \times \\
 &\quad \times \left(C_{13}(\tau) d_1^4 \exp(d_1 x) + C_{14}(\tau) d_2^4 \exp(d_2 x) + C_{15}(\tau) d_3^4 \exp(d_3 x) + \right. \\
 &\quad \left. + C_{16}(\tau) d_1^4 \exp(-d_1 x) + C_{17}(\tau) d_2^4 \exp(-d_2 x) + C_{18}(\tau) d_3^4 \exp(-d_3 x) \right), \\
 Q &= \frac{1}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{2} \left(\frac{a^0}{a_1^0} - 0.5 \frac{h}{h_1} \xi \right) \frac{\rho_1}{\rho_f} \frac{E}{E_1} \left(\frac{h}{h_1} \right)^3 \xi \frac{1}{\tau^2} \times \\
 &\quad \times \left(C_{13}(\tau) d_1^5 \exp(d_1 x) + C_{14}(\tau) d_2^5 \exp(d_2 x) + C_{15}(\tau) d_3^5 \exp(d_3 x) - \right. \\
 &\quad \left. - C_{16}(\tau) d_1^5 \exp(-d_1 x) - C_{17}(\tau) d_2^5 \exp(-d_2 x) - C_{18}(\tau) d_3^5 \exp(-d_3 x) \right),
 \end{aligned}$$

Подставляя выражения для давления и радиального перемещения в условия сопряжения (32)–(34), приходим к системе 18 алгебраических уравнений для определения $C_i(\tau)$ ($i = \overline{1,18}$). Далее была разработана компьютерная программа для вычисления неизвестных коэффициентов $C_i(\tau)$ ($i = \overline{1,18}$) и определения в пространстве изображений преобразования Лапласа численных значений давления, радиальных перемещений, изгибающих моментов и перерезывающих сил, а также численного обращения интегрального преобразования Лапласа, основанного на представлении искомых функций в ряды Фурье. Таким образом были получены искомые решения $\hat{p}_1(x, \tau)$, $\hat{p}(x, \tau)$, $\hat{p}_2(x, \tau)$, $w_1(x, \tau)$, $w(x, \tau)$, $w_2(x, \tau)$, $m_1(x, \tau)$, $m(x, \tau)$, $m_2(x, \tau)$, $q_1(x, \tau)$, $q(x, \tau)$, $q_2(x, \tau)$.

Численное решение получено для импульса давления вида

$$f(t) = 0.5 A t^2 e^{-\alpha t}, \quad A = 4.5 \cdot 10^{-6}, \quad \alpha = 3 \cdot 10^{-3}.$$

Безразмерная функция $f(t)$ выбрана сходной с реальным пульсовым импульсом [3] так, что ее максимум соответствует систолическому давлению $5 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^2$, продолжительность во времени соответствует 1 сек, а максимум расположен на 1/3 сек от начала координат. Было исследовано распределение радиального перемещения, изгибающих моментов и перерезывающих сил вдоль пространственной координаты x .

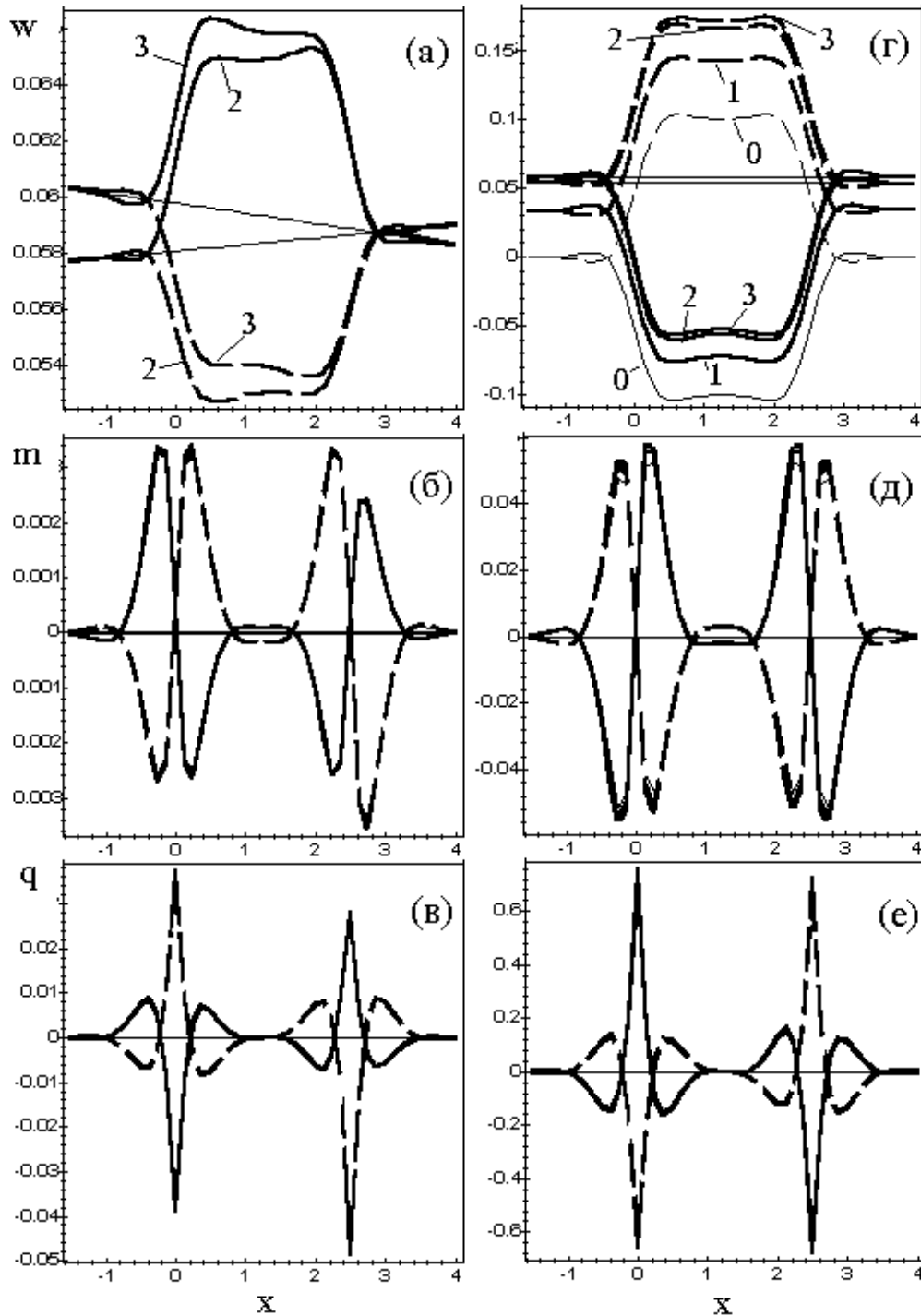


Рис.1 Распределение радиального смещения, изгибающих моментов и перерезывающих сил вдоль пространственной координаты

На рис.1 представлено распределение радиального смещения, изгибающих моментов и перерезывающих сил во вставке $0 \leq x \leq 2,5$ и ее окрестности $-1,5 \leq x \leq 4$ для следующих значений безразмерных параметров: $\xi = h_1/a_1 = 0.1$; $\rho_1/\rho_f = \rho/\rho_f = 1.1$; $E/E_1 = E_2/E_1 = 1.0$. Параметры h_2/h_1 , h/h_1 и a_2/a_1 , a/a_1 варьируются.

Исследовалось влияние изменения толщины вставки относительно толщины основной оболочки. На рис.1(а, б, в) величины принимают значения $h/h_1 = 0.9$ (сплошная линия), 1.1 (пунктир), $h_2/h_1 = 1.0$ при постоянном радиусе срединной поверхности $a_2/a_1 = a/a_1 = 1.0$ для моментов времени $t = 2500, 3000$ (индексы 2, 3). При $h/h_1 = 0.9$ в более тонкой оболочке участка вставки радиальные смещения (рис. 1а) больше, чем в других частях оболочки. И наоборот, при $h/h_1 = 1.0$ более толстая вставка деформируется меньше, чем оболочка в целом. В местах стыка возникают изгибающие моменты, достигающие величины порядка $3 \cdot 10^{-3}$ (рис. 1б), и перерезывающие силы, достигающие $5 \cdot 10^{-2}$ (рис. 1в). Видно, что распределение $w(x)$, $m(x)$ и $q(x)$ в окрестностях стыков вставки с оболочкой не симметрично относительно середины вставки, в чем и проявляется влияние импульса давления, распределенного вдоль пространственной координаты.

Далее было исследовано влияние изменения радиуса срединной поверхности вставки относительно радиуса срединной поверхности основной оболочки. На рис.1(г, д, е) величины принимают значения $a/a_1 = 0.9$ (сплошная линия), 1.1 (пунктир), $a_2/a_1 = 1.0$ при постоянной толщине оболочки $h_2/h_1 = h/h_1 = 1.0$ для моментов времени $t = 2000, 2500, 3000$ (индексы 1, 2, 3). Индексом 0 обозначены кривые, соответствующие статическому состоянию до прохождения импульса давления. Как и следовало ожидать, при $a/a_1 = 0.9, 1.1$ радиальные смещения (рис. 1г) в области вставки изменяются на ∓ 0.1 относительно смещений в однородной оболочке при прохождении по ней импульса. В местах стыка вставки с основной оболочкой возникают изгибающие моменты, достигающие величины порядка $6 \cdot 10^{-2}$ (рис. 1д), и перерезывающие силы, достигающие $7 \cdot 10^{-1}$ (рис. 1е), эти величины практически равны соответствующим величинам в статическом состоянии. Следовательно, вклад динамического состояния на порядок меньше того, который соответствует статическому состоянию оболочки со вставкой с радиусом срединной поверхности, отличным от радиуса основного сосуда.

Этот факт находится в полном соответствии с ранее полученным аналогичным выводом в задаче о прохождении импульса давления места стыка двух полубесконечных оболочек, заполненных жидкостью [1].

Список использованной литературы

1. Авраменко О.В. Исследование динамической и статической задач деформации
2. Caro C.G., Pedley T.J., Schroter R.C., Seed W.A. The mechanics of the circulation.- Oxford, Oxford Univ. Press, 1978.
3. Pedley T.J. The fluid mechanics of large blood vessels. Cambridge: Cambridge University Press, 1980.
4. Selezov I.T. Modelling of wave and diffraction processes in continuous media (in Russian).- Kiev: Naukova Dumka, 1989.-204 с.
5. Selezov I.T., Pallotti G., Avramenko O.V. Predominant danger of bending stresses in a joint of a artificial and host blood vessels // Int. J. of Artificial Organs.- 1995.- 18, N8.- P.439.

Поступила в редколлегию 14.04.99