

УДК 539.3: 534.1

Е. В. АЛТУХОВ, канд. физ.-мат. наук, Ю.В. ПАНЧЕНКО асп., Донецкий гос. ун-т

## КОЛЕБАНИЯ ТРАНСТРОПНЫХ ПЛАСТИН С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА ПЛОСКОГО ТОРЦА ИЛИ ДИАФРАГМЫ

Получены однородные решения трехмерных динамических задач теории упругости для трансверсально-изотропных пластин, торцы которых являются плоскими или покрыты диафрагмой. Приведены результаты численных исследований дисперсионных характеристик.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим транстропную пластину, на торцах которой граничные условия имеют вид

$$u_3(x_1, x_2, \pm 1) = 0; \quad \sigma_{j3}(x_1, x_2, \pm 1) = 0 \quad (j = 1, 2) \quad (1.1)$$

или

$$u_j(x_1, x_2, \pm 1) = 0; \quad \sigma_{33}(x_1, x_2, \pm 1) = 0. \quad (1.2)$$

Пластина деформируется внешними усилиями, гармонически изменяющимися во времени и приложенными к боковой поверхности. Задача построения однородных решений сводится к интегрированию уравнений движения [1, 2]

$$\begin{aligned} s_0^{-2} \partial_3^2 u_1 + (\lambda^2 D^2 + \Omega^2) u_1 + \mu_1 \lambda^2 \partial_1 (\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) + \mu_3 \lambda \partial_1 \partial_3 u_3 &= 0; \\ s_0^{-2} \partial_3^2 u_2 + (\lambda^2 D^2 + \Omega^2) u_2 + \mu_1 \lambda^2 \partial_2 (\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) + \mu_3 \lambda \partial_2 \partial_3 u_3 &= 0; \\ \mu_2 \partial_3^2 u_3 + (\lambda^2 s_0^{-2} D^2 + \Omega^2) u_3 + \mu_3 \lambda \partial_3 (\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

с учетом граничных условий (1.1) или (1.2). Здесь и ниже используются обозначения принятые в работах [1, 3].

**2. Однородные решения.** Следуя методу И. И. Воровича, амплитудные значения смещений будем искать в виде суммы вихревого и потенциального состояний

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_{ie}(x_1, x_2, x_3) + u_{in}(x_1, x_2, x_3) \quad (i = 1, 2, 3).$$

Однородные решения, соответствующие вихревому состоянию, можно записать так

$$\begin{aligned} u_{1e}(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{k=1}^{\infty} p_k(x_3) \partial_2 B_k(x_1, x_2); \\ u_{2e}(x_1, x_2, x_3) &= - \sum_{k=1}^{\infty} p_k(x_3) \partial_1 B_k(x_1, x_2); \quad u_{3e}(x_1, x_2, x_3) = 0. \end{aligned}$$

Уравнения (1.3) и условия (1.1), (1.2) будут удовлетворены, если функции  $B_k^\pm(x_1, x_2)$  являются метагармоническими

$$D^2 B_k^\pm(x_1, x_2) - \lambda^{-2} \left( (\delta_k^\pm)^2 s_0^{-2} - \Omega^2 \right) B_k^\pm(x_1, x_2) = 0,$$

а собственные функции имеют вид

$$p_k^+(x_3) = \cos \delta_k^+ x_3; \quad p_k^-(x_3) = (\sin \delta_k^- x_3) / \delta_k^-.$$

При этом, если имеют место граничные условия (1.1), то

$$\delta_k^+ = k\pi; \quad \delta_k^- = (k - 0.5)\pi,$$

а в случае соотношений (1.2)

$$\delta_k^+ = (k - 0.5)\pi; \quad \delta_k^- = k\pi \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Знаки '+' и '-' относятся соответственно к симметричной и кососимметричной деформациям пластины относительно плоскости  $x_3 = 0$ .

Потенциальное решение найдем, исходя из представления

$$\mathbf{u}_n = (n(x_3) \partial_1 C(x_1, x_2), n(x_3) \partial_2 C(x_1, x_2), q(x_3) C(x_1, x_2)).$$

Тогда из условий (1.1), (1.2) и уравнений (1.3) следуют соответствующие спектральные задачи

$$\partial_3 n(\pm 1) = 0, \quad q(\pm 1) = 0; \tag{1.4}$$

$$n(\pm 1) = 0, \quad \partial_3 q(\pm 1) = 0; \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} s_0^{-2} \partial_3^2 n(x_3) + ((1 + \mu_1) \gamma^2 + \Omega^2) n(x_3) + \mu_3 \lambda \partial_3 q(x_3) &= 0; \\ \mu_2 \partial_3^2 q(x_3) + (\gamma^2 s_0^{-2} + \Omega^2) q(x_3) + \mu_3 \lambda^{-1} \gamma^2 \partial_3 n(x_3) &= 0, \end{aligned} \tag{1.6}$$

решение которых зависит от значения выражения  $b_{10} - \sqrt{b_{20}}$  [1].

Если  $b_{10} > \sqrt{b_{20}}$ , то из (1.4), (1.6) имеем

$$\begin{aligned} n_p^+(x_3) &= s_{2p} \sin s_{2p} \cos s_{1p} x_3 - s_{1p} \sin s_{1p} \cos s_{2p} x_3, \\ n_p^-(x_3) &= s_{2p} \cos s_{2p} \sin s_{1p} x_3 - s_{1p} \cos s_{1p} \sin s_{2p} x_3, \\ q_p^+(x_3) &= l_{1p} s_{2p} \sin s_{2p} \sin s_{1p} x_3 - l_{2p} s_{1p} \sin s_{1p} \sin s_{2p} x_3, \\ q_p^-(x_3) &= l_{1p} s_{2p} \cos s_{2p} \cos s_{1p} x_3 - l_{2p} s_{1p} \cos s_{1p} \cos s_{2p} x_3, \end{aligned} \tag{1.7}$$

где  $\gamma_p^\pm$  - корни дисперсионных уравнений

$$F_1^+(\gamma, \Omega) = \sin s_1 \sin s_2 = 0; \quad F_1^-(\gamma, \Omega) = \cos s_1 \cos s_2 = 0. \quad (1.8)$$

Для спектральной задачи (1.5), (1.6) собственные функции и дисперсионные уравнения таковы

$$\begin{aligned} n_p^+(x_3) &= \cos s_{2p} \cos s_{1p} x_3 - \cos s_{1p} \cos s_{2p} x_3, \\ n_p^-(x_3) &= \sin s_{2p} \sin s_{1p} x_3 - \sin s_{1p} \sin s_{2p} x_3, \\ q_p^+(x_3) &= l_{1p} \cos s_{2p} \sin s_{1p} x_3 - l_{2p} \cos s_{1p} \sin s_{2p} x_3, \\ q_p^-(x_3) &= l_{1p} \sin s_{2p} \cos s_{1p} x_3 - l_{2p} \sin s_{1p} \cos s_{2p} x_3, \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$F_2^+(\gamma, \Omega) = \cos s_1 \cos s_2 = 0; \quad F_2^-(\gamma, \Omega) = \sin s_1 \sin s_2 = 0. \quad (1.10)$$

При  $b_{10} < \sqrt{b_{20}}$  собственные значения  $\gamma_p$  и собственные функции  $n_p(x_3), q_p(x_3)$  могут быть получены соответственно из (1.7) – (1.10) формальной заменой  $s_2$  на  $is_2$ .

В результате компоненты вектора смещений, соответствующие потенциальному решению, примут вид

$$\begin{aligned} u_{1n}(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{p=1}^{\infty} n_p(x_3) \partial_1 C_p(x_1, x_2); \\ u_{2n}(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{p=1}^{\infty} n_p(x_3) \partial_2 C_p(x_1, x_2); \\ u_{3n}(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{p=1}^{\infty} q_p(x_3) C_p(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Функции  $C_p^\pm(x_1, x_2)$  являются решением уравнения

$$D^2 C_p^\pm(x_1, x_2) - (\gamma_p^\pm)^2 \lambda^{-2} C_p^\pm(x_1, x_2) = 0.$$

**Анализ численных результатов.** Из уравнений (1.8) и (1.10) следует, что  $F_1^+ = F_2^-$  и  $F_1^- = F_2^+$ . Поэтому достаточно провести анализ кинематических характеристик для случая плоского торца. Из уравнения (1.8) получаем четыре семейства собственных значений [3]. В плоскости  $(v = i\gamma, \Omega)$  имеется конечное число действительных и счетное множество мнимых корней уравнения (1.8). Следует отметить, что всегда существует минимальное значение частоты  $\Omega_{\min}$ , ниже которой отсутствуют распространяющиеся моды.

На рис. 1-3 для волновода из кристалла  $\beta$ -кварца ( $\nu = 0,065$ ,  $\nu_z = 0,246$ ,  $\nu_2 = 0,278$ ,  $s_0^2 = 1,385$ ) показаны графики изменения фазовых  $c_p = c_2 \Omega / \nu$  и групповых  $c_g = -c_2 F'_\nu / F'_\Omega$  скоростей. Горизонтальные штриховые и штрих пунктирные прямые линии на всех рисунках соответствуют значениям скоростей продольной ( $c_1$ ) и поперечной ( $c_2$ ) волн.

На рис. 1 приведены графики изменения фазовых (а) и групповых (б) скоростей первых двух мод каждого из четырех семейств собственных значений. Сплошные линии соответствуют симметричной относительно срединной плоскости деформации пластины, штриховые – антисимметричной деформации. Данные рис. 1 показывают, что при  $\Omega \rightarrow \infty$  одна группа мод стремится к значению  $c_1$ , а другая к  $c_2$ .

На рис. 2, 3 изображены графики изменения соответственно фазовой и групповой скоростей первой моды для симметричной (а) и кососимметричной (б) деформаций пластины. Кривая 1 соответствует

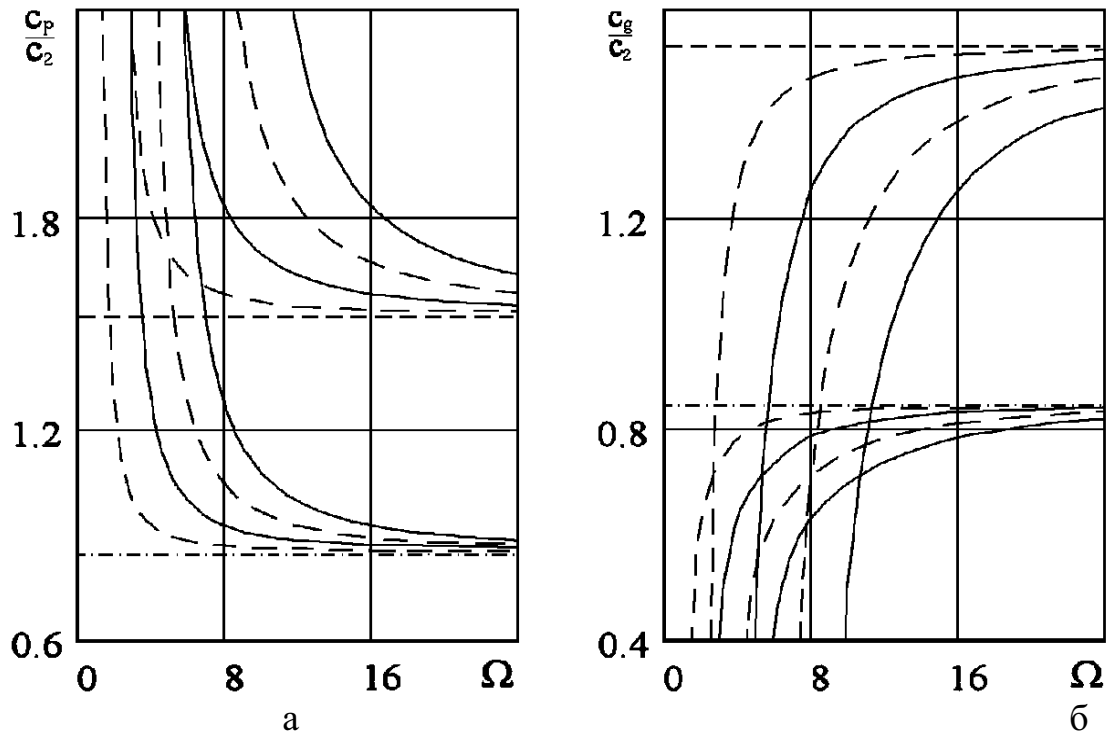


Рис. 1

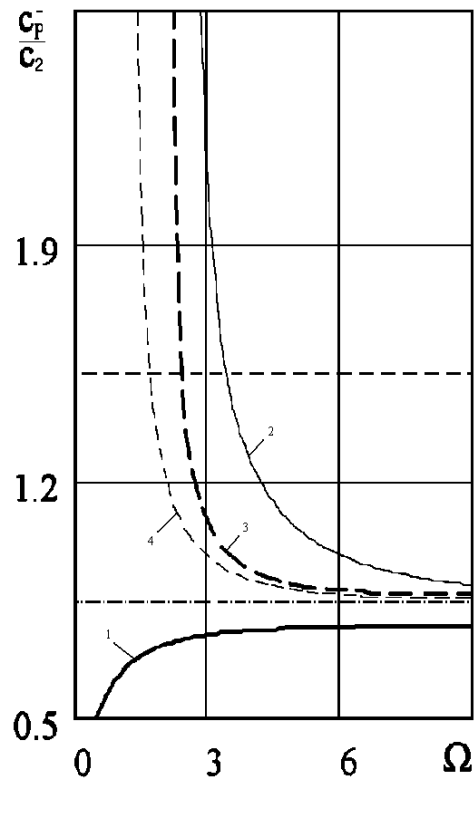
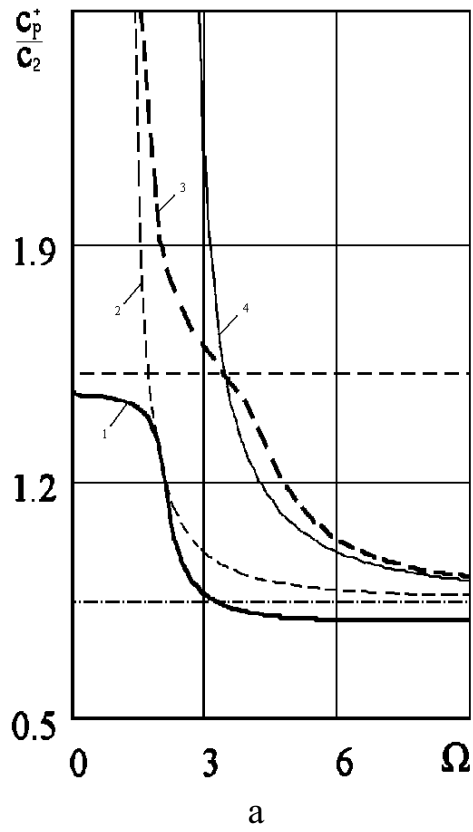


Рис. 2

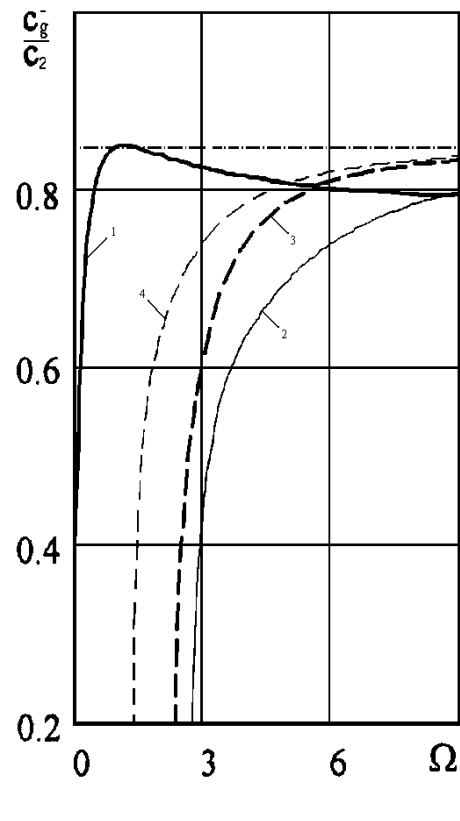
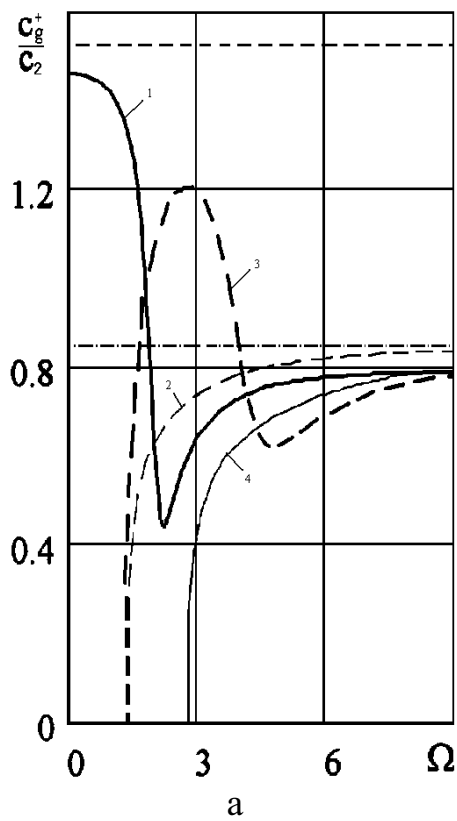


Рис. 3

свободным торцам; 2 - диафрагме (1.2); 3 - условиям жесткого защемления торцов; 4 - плоскому торцу (1.1). Из приведенных данных следует, что вид однородных граничных условий на торцах пластины оказывает существенное влияние на характер изменения фазовых и групповых скоростей в области низких частот. В коротковолновом режиме независимо от вида граничных условий значения фазовых и групповых скоростей приближаются к величине  $c_2$ .

### **Список использованной литературы**

1. Алтухов Е. В., Панченко Ю. В. Колебания трансропных пластин в случае смешанных граничных условий // Теорет. и прикл. механика. Харьков, 1999. Вып. 29. С. 52 - 62.
2. Космодамианский А. С., Шалдырван В. А. Толстые многосвязные пластины. - К.: Наук. думка, 1978. -240 с.
3. Алтухов Е.В., Панченко Ю.В. Трехмерные задачи установившихся колебаний трансропных пластин // Современные проблемы концентрации напряжений: Тр. Междунар. научн. конф., Донецк, 21 - 25 июня 1998 г. Донецк, 1998. С. 21 - 25.

Поступила в редколлегию 14.03.99