УДК 517.9

М. Ю. ЦАРЬКОВ, канд. физ.-мат. наук,
Симфероп. ун-т

О РАЗРЕШИМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассматриваются дифференциальные уравнения второго порядка в оснащенных гильбертовых пространствах. Уравнения такого вида появляются в качестве операторных формулировок ряда задач механики сплошной среды. Доказываются теоремы о существовании и единственности решений.

В работе рассматривается дифференциальное уравнение с операторными коэффициентами.

$$u'' + Ju + Au' + Bu = f(t) \tag{1}$$

дополненное начальными условиями

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = v_0 \tag{2}$$

Операторы действуют в «цепочке» гильбертовых пространств

$$W \subset H \subset W', \tag{3}$$

где W и W' образуют оснащение H. Скалярное произведение (u, v) пространства W соотношением

$$(u, v)_W = (Ju, v).$$

Оператор A линейно и непрерывно отображает H в H, оператор B аналогично действует из W в H. Начальные значения u_0 и v_0 берутся из W и H соответственно, наконец, $f(t)$ - функция, определенная на отрезке $[0,T]$.

Необходимость изучения таких уравнений возникает, например, в задачах классической теории упругости [1] или гидромеханики [2].

Решением задачи (1), (2) называется функция $u(t)$ со значениями в W, определенная и непрерывная на $[0,T]$, обладающая непрерывной на $[0,T]$ производной в пространстве H, удовлетворяющая начальным условиям (2) и уравнению (1) в смысле теории распределений со значениями в W'.

Сначала будет рассмотрен частный случай уравнения (1):

$$u'' + Ju = f(t). \tag{4}$$

Теорема 1. Если, $f(t)$ как функция со значениями в W' имеет на $[0,T]$ конечную вариацию, то существует и только одно решение задачи (4), (2).

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $f(0)=0$. Пусть $V(0,T;W')$ – банахово пространство функций со значениями в W', заданных на $[0,T]$, имеющих конечную вариацию и удовлетворяющих указанному условию. В качестве нормы в этом пр остранстве берется вариация $V(f)$ функции f на $[0,T]$. Рассмотрим пространство

$$W \times H \times V(0,T;W'). \tag{5}$$

Надо доказать, что существует отображение, которое каждому эл ементу пространства (5) – u_0, v_0, f, ставит в соответствие решение з адачи (4), (2). Это отображение сначала будет задано на плотном в (5) множестве, а потом расширено по непрерывности на все пространство (5).

Из спектральной теоремы следует, что существует последов ательность L_i, $(i \in N)$, инвариантных подпространств оператора J, такая, что каждое из пространств (3) является ортогональной суммой этих подпространств. При этом на L_i эквивалентны нормы пр остранств (3), а сужение J на L_i является непрерывным оператором.

Пусть L – сумма некоторого конечного набора подпространств L_i. Если функция $f(t)$ принимает значения из L, а u_0 и v_0 принадлежат L, то задача (4), (2) однозначно разрешима [3]. Для ее решения справедливо тождество

$$\|u'(t)\|^2 + \|u(t)\|_W^2 = \|v_0\|^2 + \|u_0\|_W^2 + 2\int_0^t (f(s), du(s)). \tag{6}$$

Оно получается, если уравнение (4) умножить скалярно в H на $u'(t)$ и проинтегрировать полученное соотношение. В правой части (6) инт еграл Римана-Стилтьеса понимается как предел известных интеграл ьных сумм. Из (6) следует справедливость неравенства

$$\|u'(t)\| + \|u(t)\|_W \le 2\|v_0\| + 2\|u_0\|_W + 6V(f). \tag{7}$$

Действительно, интегрируя по частям и пользуясь стандартной оце нкой интеграла Римана-Стилтьеса, получаем:

$$\|u'(t)\|^2 + \|u(t)\|_W^2 \le \frac{1}{2} m(t) + \left(\|v_0\| + \|u_0\|_W + 3V(f)\right)^2,$$

где $m(t)$ – максимум $\|u(s)\|_W^2$ на $[0,t]$. Отсюда следует неравенство

$$\|u'(t)\|^2 + \|u(t)\|_W^2 \leq 2\left(\|v_0\| + \|u_0\|_W + 3V(f)\right)^2,$$

из которого вытекает (7).

Рассмотрим общий случай. Пусть P_k – ортопроектор на сумму M_k подпространств L_i, где $i = 1,\ldots,k$. Заменяя в (4) и (2) данные рассматриваемой задачи на $P_k f(t)$, $P_k u_0$ и $P_k v_0$ соответственно, получим проекцию этой задачи на M_k. Пусть $u_k(t)$ – соответствующее решение. Ясно, что $P_k u_0$ сходится к u_0 в W, а $P_k v_0$ сходится к v_0 в H. Легко показать, что последовательность $P_k f(t)$ сходится к $f(t)$ по вариации. Отсюда с помощью неравенства (7) получаем, что последовательность $u_k(t)$ сходится в пространстве W равномерно на $[0,T]$. Предел $u(t)$ этой последовательности является непрерывной на $[0,T]$ функцией со значениями в W. Аналогично, из (7) следует, что последовательность $u_k'(t)$ равномерно сходится в H. Ее предел совпадает с производной $u'(t)$ и является непрерывной на $[0,T]$ функцией со значениями в H. Ясно, что функция $u(t)$ удовлетворяет начальным условиям (2). В уравнении, которому удовлетворяют функции $u_k(t)$, можно перейти к пределу в пространстве распределений со значениями в W'. Получим, что $u(t)$ удовлетворяет уравнению (4) в смысле теории распределений.

Для доказательства единственности достаточно заметить, что проекции решения $u(t)$ на подпространства L_i однозначно определяются данными задачи. Теорема доказана.

Замечание. Предельным переходом получается, что для решения задачи (4), (2) выполняются тождество (6) и неравенство (7).

Пусть $L_1(0,T;H)$ – пространство функций со значениями в H, определенных и интегрируемых на $[0,T]$, с нормой

$$\|f\| = \int_0^T \|f(t)\| dt.$$

Теорема 2. Если f принадлежит $L_1(0,T;H)$, то существует и только одно решение задачи (4), (2).

Доказательство. Используем обозначения, введенные при доказательстве теоремы 1, и будем рассуждать аналогично. Пусть сначала $f(t)$, u_0 и v_0 из L. Тогда решение существует и удовлетворяет соотношению

$$\|u'(t)\|^2 + \|u(t)\|_W^2 = \|v_0\|^2 + \|u_0\|_W^2 + 2\int_0^t (f(s), u'(s))ds. \qquad (8)$$

Из (8) следует справедливость неравенства

$$\|u'(t)\| + \|u(t)\|_W \le 2\|v_0\| + 2\|u_0\| + 3\int_0^T \|f(t)\| dt. \qquad (9)$$

Рассматривая общий случай, как и при доказательстве теоремы 1, вводим решения $u_k(t)$ и, используя неравенство (9), получаем, что их предел существует и является решением рассматриваемой задачи. Теорема доказана.

Замечание. Для решения, существование которого установлено в теореме 2, справедливы тождество (8) и оценка (9).

Перейдем к рассмотрению задачи (1), (2). Пусть $w_0(t)$ – функция, определенная на $[0,T]$ и непрерывная как функция со значениями в W. Предположим, что она непрерывно дифференцируема на $[0,T]$ как функция со значениями в H. Будем считать, что $w_0(0) = u_0$ и $w_0'(0) = v_0$, а $f(t)$ определим на $(0,T)$ по формуле

$$f(t) = w_0''(t) + Jw_0(t) \qquad (10)$$

как распределение со значениями в W'.

Теорема 3. Предположим, что правая часть $f(t)$ уравнения (1) определена по формуле (10). Утверждается, что существует и только одно решение задачи (1), (2).

Доказательство. Определим функции $w_k(t)$ последовательно как решения задач

$$w_{k+1}''(t) + Jw_{k+1}(t) = -Aw_k'(t) - Bw_k(t), w_{k+1}(0) = w_{k+1}'(t) = 0.$$

Правая часть уравнения является непрерывной на $[0,T]$ функцией со значениями в H, что позволяет использовать теорему 2. Из неравенства (9) и непрерывности операторов A и B, следует выполнение неравенства

$$\|w'_{k+1}(t)\| + \|w_{k+1}(t)\|_W \le C\int_0^t \left(\|w'_k(s)\| + \|w_k(s)\|_W\right)ds,$$

где C не зависит от t и k. Отсюда следует, что

$$\|w'_k(t)\| + \|w_k(t)\|_W \le \frac{C^k t^k}{k!} M(t), \tag{11}$$

где

$$M(t) = \max_{0\le s\le t}\left(\|w'_0(s)\| + \|w_0(s)\|_W\right).$$

Определим $u(t)$ равенством

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(t). \tag{12}$$

Ряд (12), в силу оценки (11), сходится в W, причем равномерно на $[0,T]$. Его сумма является непрерывной на $[0,T]$ функцией со значениями в W. Соответствующий ряд из производных в силу той же оценки сходится равномерно на $[0,T]$ в пространстве H. Его сумма непрерывна и является производной функции $u(t)$. Ясно, что $u(t)$ удовлетворяет начальным условиям (2). Остается проверить, что $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1). Это достигается подстановкой ряда (12), определяющего $u(t)$, в уравнение (1). Вычисляя вторую производную функции $u(t)$ в смысле теории распределений, можно дифференцировать почленно ряд, суммой которого эта функция является. Остается учесть соотношение (10) и уравнения, которым удовлетворяют $w_k(t)$.

Докажем единственность. Пусть $u(t)$ является решением задачи (1), (2) с $f = 0$ и $u_0 = v_0 = 0$. Тогда $u(t)$ можно рассматривать как решение уравнения (4) с правой частью $f(t)$, равной $-Au'(t) - Bu(t)$. Используя неравенство (9), получаем:

$$\|u'(t)\| + \|u(t)\|_W \le \int_0^t \left(\|u'(s)\| + \|u(s)\|_W\right)ds,$$

откуда следует, что $u(t)$ – нулевая. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Утверждение теоремы 3 остается верным, если опустить зависимость операторов A и B от t. Доказательство при этом сохраняется без изменений, если считать, что нормы этих операторов ограничены. Кроме того, надо предположить, что для любой непрерывной на $[0,T]$ функции со значениями в H, функция $A(t)u(t)$ измерима. Аналогичному условию надо подчинить и оператор-функцию $B(t)$.

Замечание. Решение $u(t)$ задачи (1), (2) при доказательстве теоремы 3 представлено в виде ряда. Отметим, что все члены этого р я-да, кроме первого, обладают непрерывной второй производной в W', которая существует в классическом смысле. Ряд из вторых произво д-ных $w_k''(t)$, $(k\in N)$, сходится в W' равномерно на $[0,T]$.

Список использованной литературы

1. *Дюво Г., Лионс Ж. –Л.* Неравенства в механике и физике. М., 1980. 382 с. 2. *Царьков М. Ю.* Об операторной формулировке одного класса задач линейной гидродинамики // Динамические системы. – 1994. Вып. 13. С. 118-123. 3. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970. 534 с.

Поступила в печать 18.04.98