

А. Р. СНИЦЕР, канд. физ.-мат. наук, Н. Н. МАРКОВСКАЯ, инж.,
Симфероп. ун-т

КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ШТАМПА НА СЛОЕ СЦЕПЛЕННОМ С ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ, СОДЕРЖАЩИМИ ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ ПОЛОСТЬ

Реализован алгоритм динамической задачи Рейсера-Сагоци для слоя сцепленного с полупространством, содержащими цилиндрическую полость, данный в [9]. Приведены результаты численной реализации задачи. Проведен анализ влияния механических и геометрических параметров слоя и полупространства на амплитудно-частотные характеристики колебаний штампа. Предложены практические приложения результатов для обеспечения сейсмоизоляции сооружений на рассмотренном основании при наличии крутильных динамических воздействий.

Классическая задача Рейснера-Сагоци исследовалась впервые в [13]. Одним из ее обобщений является рассмотренная в [9] задача о крутильных колебаниях штампа, сцепленного с многослойным упругим основанием, содержащим цилиндрическую полость. В этой задаче слои предполагались сцепленными между собой, а граница нижнего слоя – с жестким основанием. Границы цилиндрической полости и верхнего слоя вне штампа – свободны от напряжений. Колебания среды вызваны воздействием на штамп гармонического во времени крутильного момента $\text{Re } M_0 \exp(i\omega t)$ относительно оси полости. В указанной работе получены аналитические выражения для ядра и правой части интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода, к которому сводятся парные интегральные уравнения, определяющие смешанные условия на границе верхнего слоя. Через решение $\omega(t)$ интегрального уравнения выражены трансформанты преобразований Вебера от контактного напряжения $\bar{\tau}^{(1)}(\xi)$ и смещения $\bar{U}^{(1)}(\xi)$ на верхней границе многослойного основания. На основе метода начальных параметров [11], получены рекуррентные соотношения, позволяющие выразить характеристики напряженно-деформированного состояния – $\tau_{z\varphi}^{(j)}(r, z)$, $U_{\varphi}^{(j)}(r, z)$ ¹ любого слоя (j – номер слоя) через $\bar{\tau}^{(1)}(\xi)$.

В случаях одного слоя толщины h и полупространства ($h \rightarrow \infty$), которые, в частности, следуют из задачи для многослойной среды, и рассмотренных ранее в [3–5], получены численные результаты, пред-

¹ В дальнейшем будем полагать $\tau_{z\varphi}^{(j)}(r) = \tau^{(j)}(r)$, $U_{\varphi}^{(j)}(r) = U^{(j)}(r)$

ставяющие собой амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) колебаний штампа, контактные напряжения под штампом и среднюю за период мощность, излучаемую в среду. В этих же работах освещены методы сведения возникающих парных уравнений, связанных с ядрами преобразований Вебера, к уравнению Фредгольма, а также контурные преобразования в комплексной плоскости интегральных ядер, обеспечивающие эффективность их вычисления и единственность решения задачи. Более чем для одного слоя указанная задача до численных результатов не доводилась. Тем не менее, представляет несомненный практический интерес результаты расчетов такой задачи для двух и более слоев. Это связано с тем, что к геометрическим, инерционным и упругим свойствам среды, от которых зависят АЧХ колебаний штампа, многослойность вносит дополнительные параметры влияния – различные комбинации упругих и инерционных свойств слоев, а также их толщин. На основании этого можно так подобрать взаимные свойства слоев, чтобы обеспечить в заданном диапазоне частот отсутствие резонансов, и создать таким образом естественную систему сейсмоизоляции.

Рассмотрим случай двух слоев, причем толщину нижнего слоя устремим к бесконечности. Это соответствует задаче о колебаниях штампа сцепленного со слоем, лежащем на полупространстве. В этом случае интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода и его ядро известны и имеют вид [9]:

$$\omega(t) + \int_0^{\beta} \omega(s)K(t,s)ds = K(t,\beta), \quad \beta = b - a, \quad (1)$$

здесь b – радиус штампа, a – радиус полости;

$$K(t,s) = \sqrt{ts} \left\{ \int_0^{\infty} \xi [F(\xi) - 1] J_0(\xi s) J_0(\xi t) d\xi \pm \right. \\ \left. \pm i\pi \sum_m \text{Res } \xi_m [F_m(\xi_m) - 1] J_0(\xi_m s) J_0(\xi_m t) \right\}, \quad (2)$$

$$F(\xi) = 2C_{2\setminus\infty}(\xi) \left[\pi a \kappa_1(\xi) |H_2^{(1)}(\xi a)|^2 \right]^{-1} \quad (3)$$

$$C_{2\setminus\infty}(\xi) = \frac{1 + \Delta_1 \text{th} \eta_1}{\Delta_1 + \text{th} \eta_1} \quad (4)$$

$$\Delta_1 = \frac{\mu_2 \kappa_2(\xi)}{\mu_1 \kappa_1(\xi)}; \quad \eta_1 = h_1 \kappa_1(\xi); \quad \kappa_j(\xi) = \sqrt{\xi^2 - k_j^2}; \quad (5)$$

где: $k_j = \omega \sqrt{\rho_j / \mu_j}$ ($j = 1$ – слой, $j = 2$ – полупространство); ρ_j, μ_j – плотность и модуль сдвига соответственно; h_1 – толщина слоя. В (2),

(3) $J_0(x), H_2^{(1)}(x)$ – цилиндрические функции 1-го и 3-го рода, нулевого и 2-го порядков. В ядре $K(t, s)$ – (2) второе слагаемое присутствует в случае, когда взаимные свойства слоя и полупространства таковы, что $k_2 < k_1$, тогда на промежутке $k_2 < \xi < k_1$ функция (4) имеет конечное число вещественных полюсов ξ_m , являющихся вещественными нулями трансцендентного уравнения $\text{th } \eta_1 = -\Delta_1$, в противном случае ($k_2 > k_1$) – уравнение вещественных корней не имеет и второе слагаемое в (2) и с-чезает. В первом случае интеграл понимается в смысле Коши.

Модуль комплексной амплитуды угла поворота штампа массы m выражается через решение $\omega(t)$ интегрального уравнения (1) также как и в работах [3–5] и имеет вид

$$|\Theta(\Omega)| = M_0 (\pi \mu_1 b^3)^{-1} |\Phi(\Omega)|; \quad (6)$$

$$|\Phi| = \frac{|g|}{\sqrt{(1 - \lambda \text{Re } g)^2 + (\lambda \text{Im } g)^2}}, \quad \lambda = \frac{M \Omega^2}{2\pi}; \quad (7)$$

где $M = m/pb^3$ – приведенная масса штампа, ($p = b/a$), $\Omega = \omega b \sqrt{\rho_1/\mu_1}$ – приведенная частота вынужденных колебаний, ω – циклическая частота.

В (7) функция $g = g(\Omega)$ имеет смысл комплексной амплитуды угла поворота безынерционного штампа и выражается:

$$g(\Omega) = \frac{2p^3}{\pi^2} \frac{\int_0^\beta \sqrt{s} \omega(s) Y(s) ds - \sqrt{\beta} Y(\beta)}{\int_0^\beta \sqrt{s} \omega(s) ds - \sqrt{\beta}} \quad (8)$$

$$Y(s) = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \xi^{-1} F_m(\xi) J_0(\xi s) J_0(\xi \beta) d\xi. \quad (9)$$

Численная реализация задачи. Интегральное уравнение (1) заменой интеграла по квадратурной формуле трапеций сводилось к линейной алгебраической системе уравнений. С целью эффективного вычисления матрицы системы и функции $g(\Omega)$, а также обеспечения единственности решения задачи, (что связано с неоднозначностью радикалов $\kappa_j(\xi)$ в (5)) проводилось контурное преобразование интегралов (2), (9) в комплексной плоскости ζ . Будем рассматривать случай $k_2 > k_1$, тогда в (2) вычеты отсутствуют. Рассмотрим интеграл (2).

Подынтегральное выражение представим как функцию комплексной переменной $\zeta = \xi + i\eta$, записанную в виде:

$$R(\zeta, t, s) = R_1(\zeta, t, s) + R_2(\zeta, t, s) \quad (10)$$

$$R_m(\zeta, t, s) = \frac{1}{2} \zeta [F(\zeta) - 1] \begin{cases} J_0(\zeta t) H_0^{(m)}(\zeta s), & t \leq s, \\ J_0(\zeta s) H_0^{(m)}(\zeta t), & t > s. \end{cases} \quad (m = 1, 2) \quad (11)$$

Различие в представлении $R_m(\zeta, t, s)$ ($m = 1, 2$) связано с последующей

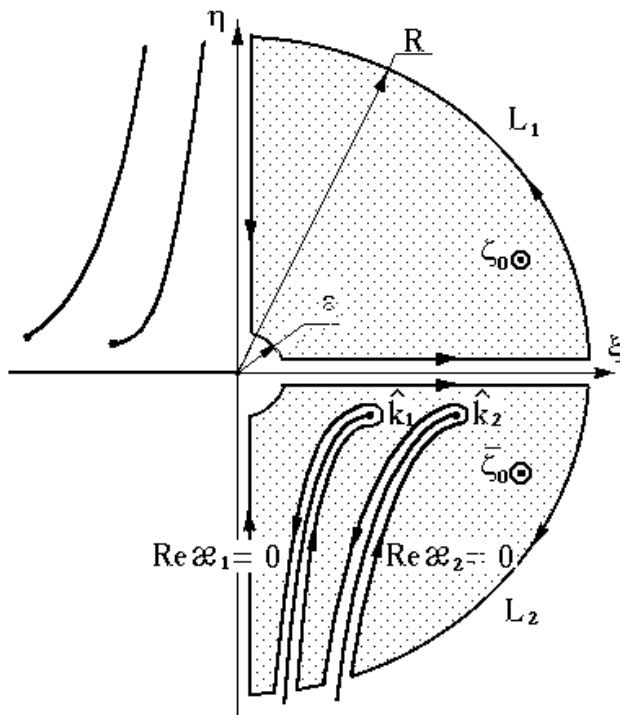


Рис. 1

оценкой интеграла в комплексной плоскости по окружностям большого радиуса. Функция (10) определена на четырехлистной римановой поверхности. Для ее построения проводятся разрезы, выходящие из точек ветвления $\zeta = \pm k_{1,2}$ двучленных функций $\kappa_{1,2}(\xi)$. Ветви радикалов $\kappa_{1,2}(\xi)$ следует выбирать таким образом, чтобы с учетом временного множителя $e^{i\omega t}$ решение $U^{(2)}(r, z)$ при $z \rightarrow \infty$ удовлетворяло условию излучения Зоммерфельда [1], если $0 < \xi < k_{1,2}$ и затухало на бесконечности при $\xi > k_{1,2}$. Это имеет место при

$\text{Re} \kappa_{1,2}(\xi) \geq 0$, $\text{Im} \kappa_j(\xi) > 0$. Учитывая такой выбор ветвей, разрезы целесообразно проводить вдоль $\text{Re} \kappa_{1,2}(\zeta) = 0$ и выбирать лист, на котором $\text{Re} \kappa_{1,2}(\zeta) > 0$. Для четкости и наглядности проведения разрезов и контуров использовался метод предельного поглощения [6], т.е. $k_{1,2}$ заменялись на $\hat{k}_j = k_j - ik'$ ($0 \leq k' \ll k_j$).

Рассмотрим сумму интегралов:

$$\sum_{m=1}^{m=2} \int_{L_m} R_m(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{m=1}^{m=2} (-1)^{m-1} \text{Res} [R_m(\zeta_m)] \quad (12)$$

где контуры L_m и полюса $\zeta_1 = \zeta_0$, $\zeta_2 = \bar{\zeta}_0$ показаны на рис. 1; ζ_0 – комплексный нуль функции $H_2^{(2)}(\zeta a)$ в первом квадранте. После предельных переходов $|\zeta| = \varepsilon \rightarrow 0$, $|\zeta| = r \rightarrow \infty$, $k' \rightarrow 0$ и преобразований, получим для ядра (2):

$$K(t,s)/\sqrt{ts} = \frac{1}{a} \left\{ \int_0^\infty \xi^2 f_1(\xi, t, s) d\xi - \frac{2i^{k_1}}{\pi} \int_0^{\xi_1} \xi^2 f_2(\xi, t, s) d\xi + \right. \\ \left. + \frac{2i^{k_2}}{\pi} \int_{k_1}^{\xi_2} \xi^2 f_3(\xi, t, s) d\xi - \pi \operatorname{Re} [\zeta_0^2 f_4(\zeta_0, t, s)] \right\}; \quad (s \leq t), \quad (13)$$

где

$$f_1(\xi, t, s) = \frac{I_0(\xi s) K_0(\xi t) [\pi I_2(\xi a) C_1(\xi) + K_2(\xi a) C_2(\xi)]}{\xi \sqrt{\xi^2 + k_1^2} K_2(\xi a) [\pi^2 I_2^2(\xi a) + K_2^2(\xi a)]}; \\ f_2(\xi, t, s) = \frac{J_0(\xi s) H_0^{(2)}(\xi t)}{\xi \sqrt{k_1^2 - \xi^2} |H_2^{(1)}(\xi a)|^2} C_4(\xi); \\ f_3(\xi, t, s) = \frac{J_0(\xi s) H_0^{(2)}(\xi t)}{\xi \kappa_1(\xi) |H_2^{(1)}(\xi a)|^2} C_3(\xi); \\ f_4(\zeta_0, t, s) = \frac{J_0(\zeta_0 s) H_0^{(1)}(\zeta_0 t)}{\kappa_1(\zeta_0)} C_5(\zeta_0), \quad (14)$$

здесь: $I_n(x)$, $K_n(x)$ – модифицированные функции Бесселя порядка n ($n = 0; 2$) и

$$C_1(\xi) = (1 - \Delta_1^2) \operatorname{tg} \eta_1 / (\Delta_1^2 + \operatorname{tg}^2 \eta_1); \\ C_2(\xi) = \Delta_1 (1 + \operatorname{tg}^2 \eta_1^2) / (\Delta_1^2 + \operatorname{tg}^2 \eta_1); \\ C_3(\xi) = \Delta_1 (\operatorname{th}^2 \eta_1 - 1) / (\Delta_1^2 + \operatorname{th}^2 \eta_1); \\ C_4(\xi) = \Delta_1 (1 + \operatorname{tg}^2 \eta_1) / (\Delta_1^2 + \operatorname{tg}^2 \eta_1); \\ C_5(\zeta_0) = C_{2\lambda\infty}(\zeta_0); \quad (15)$$

где

$$\tilde{\Delta}_1 = \tilde{\delta}_2 / \tilde{\delta}_1; \quad \eta_1 = h_1 \kappa_1(\xi); \quad \Delta_1 = \delta_2 / \delta_1; \quad \eta_1 = h_1 \kappa_1(\xi); \\ \tilde{\delta}_j = \mu \kappa_j(\xi); \quad \delta_j = \mu \kappa_j(\xi); \\ \kappa_j(\xi) = \sqrt{\xi^2 + k_j^2}; \quad \kappa_j(\xi) = \sqrt{|\xi^2 - k_j^2|}. \quad (16)$$

Аналогичные контурные преобразования для функции (9) дают:

$$Y(s) = -\frac{\pi}{2a} \int_0^{\infty} f_1(\xi, \beta, s) d\xi - \frac{i}{a} \int_0^{k_1} f_2(\xi, \beta, s) d\xi + \\ + \frac{i}{a} \int_{k_1}^{k_2} f_3(\xi, \beta, s) d\xi - \frac{\pi^2}{2a} \operatorname{Re} f_4(\zeta_0, \beta, s); \quad (s \leq \beta) \quad (17)$$

Можно показать, что подынтегральные функции в (13), (17) – ограничены в нуле, а в интегралах на полубесконечных промежутках экспоненциально убывают на бесконечности. Таким образом, полученные представления интегралов для $K(t, s)$ и $Y(s)$ – являются эффективными для вычисления на ЭВМ.

Для численной реализации задачи, от переменных t , s , и ξ – переходили к безразмерным переменным τ , σ , и x , совершая замены: $s = \beta\sigma$, $t = \beta\tau$ ($0 \leq \sigma$, $\tau \leq 1$); $\xi = k_2 x$. Вводились также безразмерные величины $\varepsilon = k_2 a$, $\beta_0 = \beta/a$, $H = h_1/b$, $m = \mu_2/\mu_1$, $\alpha = k_1/k_2$ ($\alpha \leq 1$).

Отметим, что при $\alpha = 1$ и $m = 1$ выражения для ядра $K(t, s)$ – (2) и для $Y(s)$ – (17) полностью совпадают с аналогичными интегралами задачи для полупространства с цилиндрической полостью [3].

Численная реализация задачи проводилась на ЭВМ ЕС-1060, на языке Фортран IV. Решение аппроксимирующей системы линейных алгебраических уравнений осуществлялось при помощи стандартной подпрограммы CGAUS [7] предназначенной для систем с комплексной матрицей. Элементы матрицы, представляющие интегралы, входящие в (13), вычислялись адаптивной подпрограммой QUANC8 [10], в случае вещественных подынтегральных функций, а для интегрирования комплекснозначных функций, как и в [5] – создавался ее комплексный аналог. Для вычисления цилиндрических функций привлекались стандартные подпрограммы [12], а решение интегрального уравнения и вычисление амплитуд колебаний штампа, основывалось на библиотеке модулей, созданной ранее автором работы [9], и предназначенной для решения аналогичных задач для полупространства и слоя с полостью.

Результаты расчетов. Приведем вначале результаты, характеризующие влияние двухслойности основания на колебания штампа в сравнении с аналогичной задачей для полупространства с цилиндрической полостью. Для этого, наряду с геометрическими характеристиками – относительными радиусом штампа и толщиной слоя, введем параметры, определяющие физические свойства полупространства и

слоя. В качестве параметра, определяющего физические свойства сред, будем брать акустическую жесткость $-\sqrt{\rho_j \mu_j}$, называемую также волновым сопротивлением среды [8].

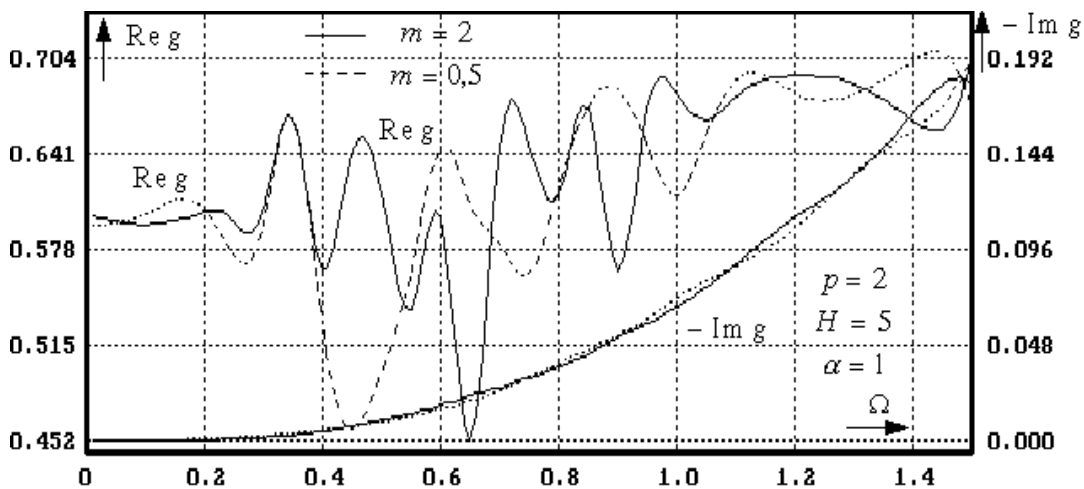
Таблица 1. Частотные зависимости комплексной амплитуды безынерционного штампа

$H = 5$ $p = 2$ $\alpha = 1$	$m = \mu_2 / \mu_1 = 2$			$m = \mu_2 / \mu_1 = 0,5$		
Ω	$\text{Re } g / 2\pi$	$\text{Im } g / 2\pi$	$ g / 2\pi $	$\text{Re } g / 2\pi$	$\text{Im } g / 2\pi$	$ g / 2\pi $
0,01	0,0954480	-0,0000000	0,0954480	0,0944898	-0,0000001	0,09448975
0,10	0,0946099	-0,0000068	0,0946099	0,0957055	-0,0000234	0,09570551
0,20	0,0958975	-0,0000622	0,0958975	0,0960678	-0,0001525	0,09606797
0,25	0,0959097	-0,0001002	0,0959096	0,0913213	-0,0002704	0,09132171
0,30	0,0962289	-0,0002637	0,0962293	0,0944065	-0,0004272	0,09440750
0,35	0,1058599	-0,0004759	0,1058609	0,1061391	-0,0006261	0,10614070
0,40	0,0898517	-0,0007885	0,0898551	0,0841137	-0,0008693	0,08411813
0,45	0,1020216	-0,0011833	0,1020285	0,0731099	-0,0011641	0,07311910
0,50	0,0978173	-0,0016557	0,0978313	0,0791133	-0,0015434	0,07912832
0,55	0,0857977	-0,0022007	0,0858259	0,0896524	-0,0019848	0,08967429
0,60	0,0952056	-0,0028267	0,0952475	0,1028883	-0,0025111	0,10291891
0,65	0,0718574	-0,0035935	0,0719472	0,0967252	-0,0031869	0,09677762
0,70	0,1027789	-0,0042863	0,1028683	0,0924768	-0,0040244	0,09256434
0,75	0,1029819	-0,0050707	0,1031066	0,0894056	-0,0051133	0,08955169
0,80	0,0978417	-0,0059366	0,0980216	0,0984831	-0,0062005	0,09867811
0,85	0,1028863	-0,0069643	0,1031217	0,1071424	-0,0072959	0,10739051
0,90	0,0896681	-0,0083063	0,0900520	0,1087091	-0,0084896	0,10904003
0,95	0,1068379	-0,0094090	0,1072513	0,1029105	-0,0097635	0,10337230
1,00	0,1082327	-0,0107673	0,1087670	0,0976843	-0,0114696	0,09835529
1,05	0,1056430	-0,0123093	0,1063576	0,1039874	-0,0128069	0,10477291
1,10	0,1080945	-0,0141801	0,1090206	0,1097650	-0,0140480	0,11065982
1,20	0,1102144	-0,0179059	0,1116595	0,1083904	-0,0170211	0,10971864
1,30	0,1094025	-0,0211936	0,1114364	0,1083352	-0,0213455	0,11041803
1,40	0,1055526	-0,0261680	0,1087480	0,1117981	-0,0249269	0,11454270
1,50	0,1120635	-0,0287218	0,1156856	0,1068515	-0,0306296	0,11115462

Для изучения влияния взаимных свойств слоя и полупространства на колебания, будем исходить из равенства их волновых чисел $(k_1 = k_2)$, что приводит к удобным для расчетов и последующего анализа соотношениям: $\mu_2 / \mu_1 = \rho_2 / \rho_1 = m$.

Расчеты частотных зависимостей $g(\Omega)$ и $|\Phi(\Omega)/2\pi|$ проводились для двух случаев: а) $m = \mu_2/\mu_1 = 2$, что соответствует соотношению $\sqrt{\rho_1\mu_1} < \sqrt{\rho_2\mu_2}$, т.е. слой акустически более мягкий, чем полупространство и б) $m = \mu_2/\mu_1 = 0,5$, тогда $\sqrt{\rho_1\mu_1} > \sqrt{\rho_2\mu_2}$, – слой акустически жестче полупространства. В обоих случаях а) и б), геометрические параметры брались равными: $H = 5$, $p = 2$.

В табл. 1 приведены зависимости действительной $\text{Re } g$ и мнимой $\text{Im } g$ частей комплексной амплитуды $g(\Omega)$ угла поворота безынерционного штампа от приведенной вынужденной частоты колебаний в диапазоне $0,01 < \Omega < 1,5$ для случаев а) и б). Переход от табличных значений $g(\Omega)$ к непрерывным для любой частоты из рассматриваемого диапазона, осуществлялся посредством аппроксимации кубическими сплайнами. Соответствующие графики приведены на рис. 2, из которого видно, что $\text{Re } g$ – осциллирующие функции, причем существуют интервалы частот, для которых функции $\text{Re } g$: а) находятся в противофазе, б) и а) находятся в фазе, в) полностью совпадают.



Отметим отличие поведения $\text{Re } g(\Omega)$ в данной задаче при $p = 2$ от аналогичных задач для полупространства и одного слоя с полостью. Так в задаче для полупространства [3] $\text{Re } g(\Omega)$ является достаточно гладкой функцией, уже в случае слоя на недеформируемом основании [5], поведение $\text{Re } g(\Omega)$ значительно зависит от толщины слоя, но все же не при каких толщинах слоя, не осциллирует так сильно, как в случае данной задачи.

¹ в дальнейшем случай а) будем называть – "мягкий слой", случай б) – "жесткий слой"

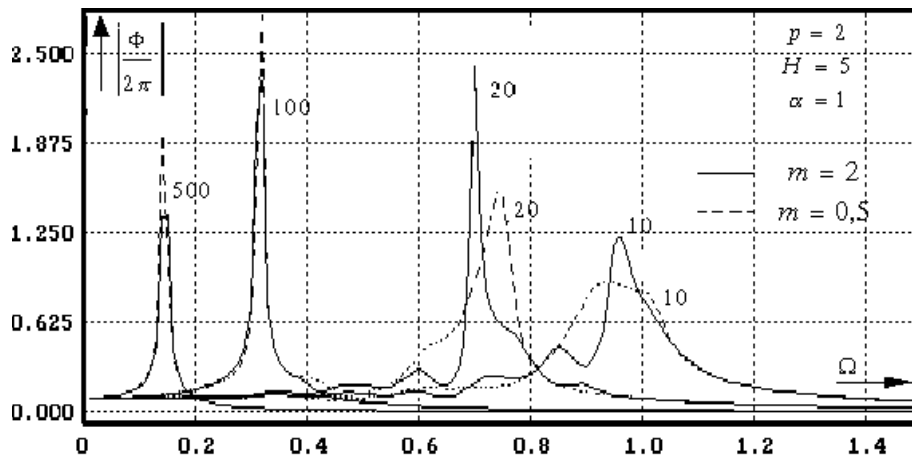


Рис. 3

Функции $-\text{Im} g(\Omega)$, как следует из рис. 2, достаточно гладкие и монотонно возрастают. Такое же поведение этой функции и в аналогичных задачах для полупространства и слоя. Заметим, однако, что в задаче для слоя на недеформируемом основании [5], существует запирающая частота $\Omega_{\text{зап}}$, ниже которой $\text{Im} g(\Omega) = 0$, и в слой не излучается энергия. В нашем случае ($p = 1, 2$; $H = 5$) и в случае полупространства такое явление не имело места.

На рис. 3 приведены АЧХ колебаний штампов массы $M = 10, 20, 100, 500$, соответствующие функциям $g(\Omega)$ на рис. 2. Сравнивая их с аналогичными результатами задачи для упругого полупространства с цилиндрической полостью [3], можно сделать следующие выводы: на средних частотах ($\Omega > 0,6$) "жесткий слой" на полупространстве уменьшает резонансные амплитуды колебаний штампа, а "мягкий" – увеличивает. На низких частотах – наоборот.

Сопоставляя графики на рис. 3 для случаев а) и б) между собой, оценим влияние **акустических свойств** слоя и полупространства на динамические характеристики колебаний:

1. На более высоких частотах ($\Omega > 0,6$) "мягкому слою" (на жестком полупространстве) соответствует большая "чувствительность", т.е. спектральные (резонансные) пики более острые и их больше, чем для "жесткого слоя" ($m = 0,5$), который уширяет "линии" спектра, уменьшая при этом резонансные амплитуды, в то время как в довольно широкой окрестности резонансных частот амплитуды увеличиваются.

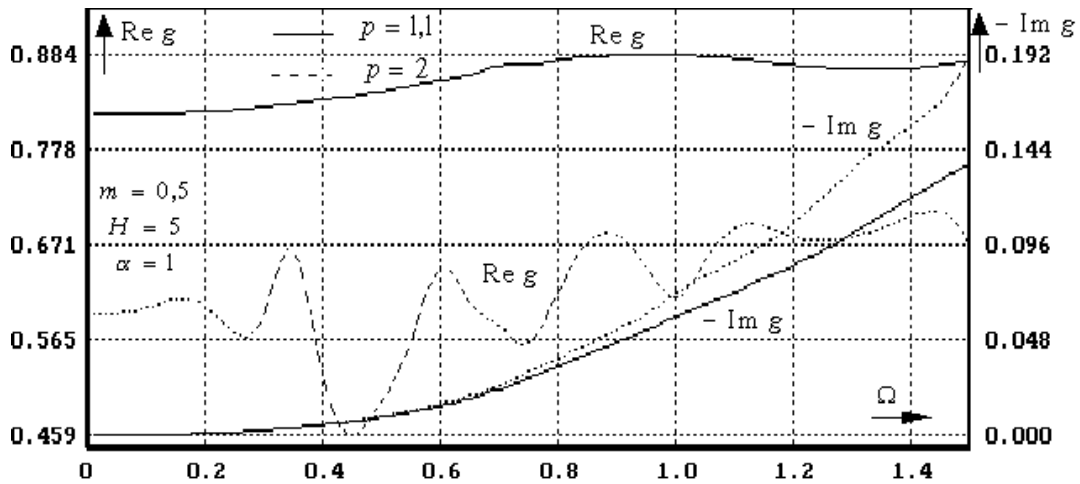


Рис. 4

2. На низких частотах ($0 < \Omega < 0,4$) "жесткий слой" (на мягком полупространстве), – увеличивает резонансные амплитуды, что соответствует, в частности, известному результату задачи о колебаниях, вызванных дифракцией длинных упругих волн сдвига на акустически "жестком" включении в "мягком" полупространстве [2].

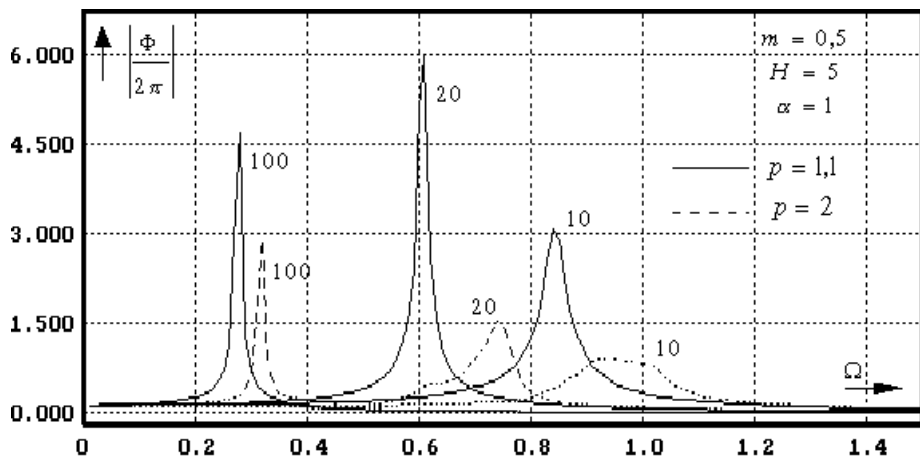


Рис. 5

Для оценки влияния **геометрических характеристик** штампа и слоя на колебания, получены частотные зависимости $\text{Re } g$, $\text{Im } g$ для различных относительных радиусов штампа – $p=1,1$ и $p=2$ ($H=5$, $\alpha=1$, $m=0,5$), приведенные на рис. 4. Соответствующие АЧХ для масс штампа $M=10,20,100$ изображены на рис. 5, из которого очевидно: 1) с уменьшением p , резонансные частоты уменьшаются, а амплитуды возрастают; 2) с ростом массы штампа резонансные амплитуды вначале возрастают и становятся более острыми, а затем убывают; резонансные частоты при этом монотонно убывают. Заметим, что такой же качественный характер имеют зависимости АЧХ от p и M в аналогичных задачах для полупространства и слоя с полостью [3,5].

Небезынтересно отметить, что при $m = 0,5$, $H = 5$, функция $\text{Reg}(\Omega)$ для $p = 1,1$ – гладкая и практически совпадает с аналогичной для полупространства с полостью [3], в то время как для $p = 2$, $\text{Reg}(\Omega)$ – сильно осциллирует (рис. 4). Это можно объяснить, по-видимому, тем, что при параметре p малом, в сравнении с толщиной слоя H ($p = 1,1$; $H = 5$), краевой эффект, который, как известно, особенно проявляется при радиусе штампа близком к радиусу полости ($p \rightarrow 1$) [3], подавляет влияние слоя, сцепленного с полупространством. В случае же, когда параметр p сравним с толщиной слоя H ($p = 2$; $H = 5$), краевой эффект ослабевает и преобладает влияние слоя: функция $\text{Reg}(\Omega)$ при этом качественно изменяется (осциллирует).

Скажем в заключение, что для заранее известных параметров сооружения (штампа) в заданном частотном диапазоне, на основании подобных расчетов, можно спроектировать двухслойный фундамент с физическими характеристиками (ρ_j, μ_j) , обеспечивающими его сейсмическую или вибрационную безопасность.

Список использованной литературы

1. Зоммерфельд А. Дифференциальные уравнения в частных производных физики. – М., 1950. – 456 с.
2. Малиц П. Я., Сницер А. Р. Сейсмическое поле, вызванное волной сдвига в полупространстве с инородным включением на границе. // Динамические системы. – 1982. – Вып. 1. – С. 32-37.
3. Малиц П. Я., Сницер А. Р., Шевляков Ю. А. О решении задачи Рейснера-Сагоци для полупространства с цилиндрической полостью. // Прикл. механика. – 1989. – Т.25, №7. – С. 24-30.
4. Малиц П. Я., Сницер А. Р. Крутильные колебания кругового штампа на упругом полупространстве и слое с цилиндрической полостью. // СимфГУ. – Симферополь, 1989 – 36 с. – (Деп. в Укр. НИИНТИ 26.05.89; № 1403-Ук89).
5. Их же, Крутильные колебания кругового штампа на упругом слое с цилиндрической полостью // Динамические системы. – 1990. – Вып. 9. – С. 54-59.
6. Митра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. – М.: Мир, 1974. – 324 с.
7. Рябухина Т. А. Решение систем линейных алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами с k правыми частями методом Гаусса. // Математическое обеспечение ЕС ЭВМ. – Минск, 1975. – Вып. 6. – С. 40-41.
8. Саваренский Е. Ф. Сейсмические волны. – М.: Недра, 1972. – 293 с.
9. Сницер А. Р. Задача Рейснера-Сагоци для многослойного основания с цилиндрической полостью // Динамические системы. – 1994. – Вып. 13. – С. 55-61.
10. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
11. Шевляков Ю. А. Матричные алгоритмы в теории упругости неоднородных сред. К.; Одесса, 1977. 216 с.
12. Математическое обеспечение ЕС ЭВМ. Вып. 3, 6, 12, 22. – Минск, 1972-1980.
13. Reissner E., Sagoci H. F. Forced torsional oscillation of elastic half-space. 1 // J. Appl. Phys. 1944. Vol. 15, № 9. P. 652-654.

Поступила в редколлегию 12.03.97