УДК 681.511.46

Е. А. ШУШЛЯПИН, канд. техн. наук, Севастоп. гос. техн. ун-т

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К СИНТЕЗУ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Предлагается метод синтеза нелинейных систем с аддитивно входящим управлением. Метод основан на применении интегральной формулы Алексеева и разработанной автором данной статьи методике синтеза, примененной ранее для линейных нестационарных терминальных систем.

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(x) + Bu,$$
$$t \in \left[t_{0,} t_f\right], x(t_0) = x^0. \tag{1}$$

В системе (1) x - n-мерный вектор состояния, Φ - непрерывная вместе со своими частными производными первого порядка вектор-функция, B- в общем случае переменная матрица коэффициентов при r-мерном векторе управления u.

Наряду с (1) будем рассматривать также соответствующую одн о-родную систему

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \Phi(\bar{x}) ,$$
$$t \in \left[t_{0,} t_f\right], \ \ \bar{x}(t_0) = x^0. \tag{2}$$

Известно выражение, определяющее решение неоднородной си с-темы (1) через решение однородной системы (2), называемое инт е-гральной формулой Алексеева [1], которое в принятых здесь обозн а-чениях имеет вид

$$x\left(t_f\right) = \bar{x}\left(t_f, t\right) + \int_t^{t_f} W\left(t_f, \tau, x(\tau)\right) \cdot B(\tau) \cdot u(\tau)\, d\tau \ , \tag{3}$$

где $x, \bar{x}$ - решения систем (1), (2) при начальных условиях в момент t, $W(t, \tau, x(\tau))$ - $(n \times n)$ матрица, определяемая как функция аргумента t системой уравнений

$$\frac{dW(t, \tau, x(\tau))}{dt} = A(t, \tau, x(\tau)) \cdot W(t, \tau, x(\tau)), \tag{4}$$

$W(\tau,\tau,x(\tau)) = I$ (I - единичная матрица),

A - $(n \times n)$ матрица частных производных вектора Φ по вектору x, т.е.

$$A = \left\{\partial \Phi_i / \partial x_j\right\}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n \tag{5}$$

Приведенное выражение похоже по форме на формулу Коши-Лагранжа для линейных систем, однако на самом деле оно является интегральным уравнением относительно $x(\tau)$ ввиду зависимости матрицы W от решения неоднородной системы. По этой причине формула Алексеева до настоящего времени, насколько нам известно, не применялась в задачах синтеза управлений нелинейными системами.

В основе предполагаемого подхода к решению задачи синтеза лежат два приема, изложенные в работах [2], [3]. В первой из них для задачи оптимизации по квадратическому критерию от конечного положения линейной нестационарной системы формулируется эквивалентная задача оптимизации, которая решается значительно легче, чем исходная задача. Во второй работе предлагается процедура получения квазиоптимального управления по критерию, упомянутому выше.

Продифференцируем левую и правую части формулы Алексеева по t вдоль интегральной кривой $x(t)$.

Поскольку $x(t_f)$ в этом случае не зависит от t, производная левой части (3) равна нулю.

В результате получим соотношение

$$\frac{d\,\bar{x}(t_f,t)}{d\,t} = W(t_f,t,x(t)) \cdot B(t) \cdot u(t). \tag{6}$$

Обратим внимание на то, что функция $\bar{x}(t_f,t)$ при $t = t_f$ равна $x(t_f)$. Учитывая связь между управлением $u(t)$ и поведением функции $\bar{x}(t_f,t)$, определяемую (6), можно строить различные подходы к синтезу оптимальных и квазиоптимальных управлений по критериям, связанным как с конечным положением системы, так и с желаемыми траекториями движения. Эти подходы могут быть основаны на обеспечении требуемого поведения функции $\bar{x}(t_f,t)$ либо функции $S(t_f,t)$, зависящий от $\bar{x}$ и критерия оптимальности. Например в работах [2], [3] исходным критерием явилась квадратичная форма вида

$$S(t_f,t_f) = x^T(t_f) \cdot F \cdot x(t_f) \to \min \tag{7}$$

где

$$S(t_f,t) = \bar{x}^T(t_f,t) \cdot F \cdot \bar{x}(t_f,t) \tag{8}$$

определялась дифференциальным уравнением

$$\frac{d\,S(t_f,t)}{d\,t} = 2\,\bar{x}^T(t_f,t)\cdot F\cdot W(t_f,t)\cdot B(t)\cdot u(t)\ , \qquad (9)$$

$$S(t_f,t_0) = S^0 .$$

В (9) W - весовая матрица линейной системы, S^0 может быть вычислено по x^0 и известному на всем интервале времени работы системы внешнему воздействию.

Повторяя вывод (9) применительно к системе (1) и используя вместо формулы Коши-Лагранжа формулу (3) и определение (4) матрицы W, можно получить аналогичное (9) выражение, где вместо весовой матрицы W линейной системы будет W, определяемая (4).

$$\frac{d\,S(t_f,t)}{d\,t} = 2\,\bar{x}^T(t_f,t)\cdot F\cdot W(t_f,t,x(t))\cdot B(t)\cdot u(t)\ , \qquad (10)$$

$$S(t_f,t_0) = S^0 .$$

По аналогии с линейными системами матрицу (4) также можно называть весовой, хотя на самом деле она таковой не является. Можно также по аналогии с [2] сформулировать эквивалентную задачу оптимизации, состоящую из критерия (7) и ограничений в виде системы дифференциальных уравнений (1), (6) и (10) с соответствующими начальными условиями. Однако при применении к этой задаче принципа максимума Понтрягина в результате получается двухточечная краевая задача (ДТКЗ), одинаковая по сложности с ДТКЗ для исходной задачи. Это обусловлено зависимостью нелинейной «весовой» матрицы от вектора x. В линейном случае такой зависимости нет, что позволило получить аналитическое выражение для управления.

Можно пойти другим путем - задать желаемое поведение функции $\bar{x}$ (или S). Так как в конечный момент $t_f\,\bar{x}(t_f,t_f) = x(t_f)$, а $S(t_f,t_f)$ равно значению критерия оптимизации, можно задаться требуемым поведением $\bar{x}(t_f,t)$ или $S(t_f,t)$ либо, в крайнем случае, добиться их подходящего конечного значения. Например, можно потребовать чтобы поведения функции $S(t_f,t)$, определяемой (8), (10), удовлетворяло также дифференциальному уравнению

$$\frac{dS(t_f,t)}{dt} = -\frac{1}{T}S(t_f,t),\ T \text{ - некоторый параметр.} \qquad (11)$$

Далее, приравнивая правые части (10) и (11), получим выражение, связывающее управление $u(t)$ и $S(t_f,t)$. Последнее, согласно (8) и

(2), определяется решением однородной системы на интервале $\left[t, t_f\right]$ при измеряемом или оцениваемом $x(t)$, используемом как начальное условие для (2). При использовании такого выражения возникает ряд проблем: определение управления по упомянутому векторно-матричному выражению; выбор желаемого поведения x или S, которые должны быть достижимыми; определение нелинейной «весовой» матрицы W; оценивание не измеряемых компонент вектора состояния; анализ чувствительности. Эти проблемы требуют отдельного анализа и в данной работе не рассматриваются.

Рассмотрим пример синтеза управления для нелинейной системы

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2^3, \\ &\dot{x}_2 = u, \quad t \in \left[0, t_f\right], \; x_1(0) = x_{10}, \; x_2(0) = x_{20} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

обеспечивающего желаемое движение по координате x_1

$$x_1(t) = x_{10} \cdot \exp(-t). \tag{13}$$

Данную задачу можно решить, подставив (13) в (12), в результате чего получится, что

$$u = \frac{1}{3}\sqrt[3]{x_{10}} \cdot \exp(-t/3). \tag{14}$$

При этом для достижимости траектории (13) координата x_2 должна определяться выражением

$$x_2(t) = -\sqrt[3]{x_{10}} \cdot \exp(-t/3). \tag{15}$$

Теперь выполним синтез с помощью одного из предложенных подходов.

Определим вначале требуемое поведение $\bar{x}\left(t_f, t\right)$, т.е. решение однородной системы, где τ - независимая переменная.

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_2^3, \\ &\dot{\bar{x}}_2 = 0, \quad \tau \in \left[t, t_f\right], \; \bar{x}_1(t) = x_1(t), \; \bar{x}_2(t) = x_2(t). \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Это решение следующее

$$\bar{x}_1\left(t_f, t\right) = x_1(t) + x_2^3(t) \cdot \left(t_f - t\right). \tag{17}$$

Подставив в (17) желаемую траекторию (13) и связанную с ней трае к-торию (15), получим требуемое поведение $\bar{x}_1(t_f, t)$

$$\bar{x}_1(t_f, t) = x_1(t) \cdot \exp(-t) \cdot (1 - t_f + t). \tag{18}$$

Далее воспользуемся выражением (6) и выражением для производной $\bar{x}$, вычисленное по (18). Учтем также, что матрица B в данном случае является вектором-столбцом с компонентами 0 и 1. В итоге получим

$$u = \frac{x_2^3(t) \cdot (1 - t_f + t) + x_1(t)}{W_{12}(t_f, t, x_1(t), x_2(t))} \tag{19}$$

«Весовая» функция W_{12}, входящая в (19), определяется системой (4), из которой нам нужны только уравнения для второго столбца матрицы W:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\,W_{12}(t, \tau, x_1(\tau), x_2(\tau))}{d\,t} = 3 \cdot x_2^2(\tau) \cdot W_{22}(t, \tau, x_1(\tau), x_2(\tau)), \\ &\frac{d\,W_{22}(t, \tau, x_1(\tau), x_2(\tau))}{d\,t} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

$$W_{12}(\tau, \tau) = 0,\ W_{22}(\tau, \tau) = 1,\ t \in [\tau, t_f].$$

Следует отметить, что для управления (19) нужна W как функция второго аргумента, а система вида (4) определяет ее как функцию пе р-вого аргумента. В отличие от линейного случая, здесь не удалось п о-лучить уравнения для W как функции второго аргумента τ. В данном примере это не существенно, однако в общем случае это скажется на трудоемкости получения и реализации алгоритма управления.

Решим систему (20) при произвольных $x_1(\tau)$ и $x_2(\tau)$, и запишем решение для значений $t = t_f$, $\tau = t$. Получим

$$W_{12}(t_f, t) = 3 \cdot x_2^2(t) \cdot (t_f - t), \quad W_{22}(t_f, t) = 1, \quad t \in [t_0, t_f] \tag{21}$$

Объединяя (19) и (21), получим управление по принципу обратной св я-зи

$$u = \frac{x_2^3(1 - t_f + t) + x_1}{3 \cdot x_2^2 \cdot (t_f - t)},\ x_1 \equiv x_1(t),\ \ x_2 \equiv x_2(t). \tag{22}$$

Непосредственной подстановкой (22) в (12) с учетом (13) и (15) можно убедиться, что система (12) с управлением (22) имеет тоже р е-шение, что и система (12) с управлением (14).

Список использованной литературы

1. *Алексеев В. М.* Об одной оценке возмущений обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика. 1961. №2. С. 28-36. 2. *Шушляпин Е. А.* Оптимальное ограниченное управление линейной нестационарной системой управления конечным положением // Динамические системы. 1994. Вып. 13. С. 36-39. 3. *Его же*, Синтез управления с обратной связью в терминальных нестационарных системах // Методологические проблемы автоматизированного проектирования и исследования систем: Тез. докл. респ. научно-техн. конф. Севастополь, 1987. С. 63.

Поступила в редколлегию 27.02.96