

И. Е. ШИПОВСКИЙ, канд. техн. наук, Л. Я. ЛОКШИНА, научн. сотр.,  
Симфероп. ун-т

## РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛАСТИН С ТРЕЩИНАМИ

Используя подход механики сплошной среды, в рамках модели линейно-упругого тела представлена методика численного моделирования поведения различных плоских образцов из конструкционных материалов со статическими и движущимися трещинами при динамическом нагружении. Вычисления проводятся при помощи модифицированного метода конечных элементов, использующего лагранжевую разностную схему. Приведены результаты тестовых расчетов в сопоставлении с данными физического эксперимента. Сравнение говорит в пользу достоверности получаемых результатов.

1. Для описания поведения нагружаемых плоских образцов с трещинами используется линейно-упругая модель сплошной среды. При выборе модели исходим из требований адекватности описания физики процесса, учитывая при этом, что модель не должна быть чрезмерно громоздкой и должна допускать эффективную реализацию на ЭВМ средней мощности.

Система уравнений, описывающая деформацию сплошной среды в рамках рассматриваемой модели, включает уравнения неразрывности, движения и определяющие соотношения. При этом материал рассматривается разделенным на большое число конечных зон (рис. 1). Связь сетки ячеек с деформированием материала определяется применяемым численным методом решения исходных дифференциальных уравнений.

Основными искомыми функциями являются: плотность  $\rho$ ; вектор скорости  $U$ ; симметричный тензор напряжений Коши  $\sigma_{ij}$ . По ним рассчитываются энергия, смещения и деформации.

При рассмотрении деформации среды удобно выделить компоненты напряжений, связанные с изменением объема и формы. То есть представить тензор напряжений в виде суммы девиаторной и шаровой части:

$$\sigma_{ij} = S_{ij} - P\delta_{ij}; \quad P = \frac{1}{3}\sigma_{ii}. \quad (1)$$

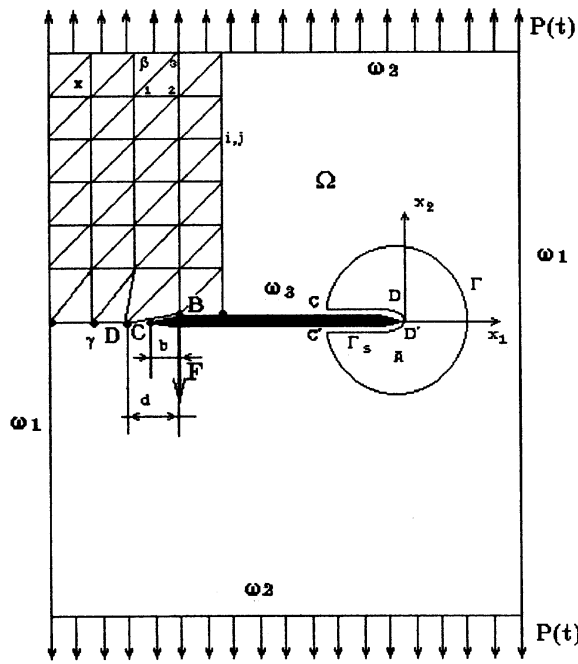


Рис. 1

Полагается, что среда однородна и изотропна как в исходном состоянии, так и во все последующие моменты времени; отсутствуют массовые силы и внутренние, распределенные по объему источники тепла; отсутствуют термические эффекты вследствие теплопроводности. При этих предположениях законы сохранения массы, количества движения в тен-

зорном виде можно записать в виде

$$\frac{\dot{V}}{V} - U_{ii,j} = 0; \quad \rho \dot{U}_i = \sigma_{ij,j}, \quad (2)$$

где:  $V = \frac{\rho^\circ}{\rho}$  – удельный относительный объем материала;  $\rho, \rho^\circ$  – начальное и текущее значение плотности;  $U_i = X_i$  – компоненты вектора скорости ( $u \equiv U_1, v \equiv U_2$ );  $X_i$  – координаты декартовой системы координат;

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i}) \quad (3)$$

(3) – компоненты тензора скоростей деформаций.

В приведенных соотношениях скалярные, векторные и тензорные величины являются функциями пространственных координат  $X_i$  и времени  $t$ ;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $i, j = \overline{1,2}$ ; по повторяющимся индексам производится суммирование; запятая после индекса означает производную по указанной следующим индексом координате; точка над величиной – производную по времени.

Система уравнений (2) – (3) замыкается с помощью определяющих соотношений, соответствующих выбранной модели среды, которые включают скалярное уравнение состояния, связывающее переменные  $P$  и  $\rho$

$$P = K\left(\frac{\rho}{\rho^\circ} - 1\right), \quad (4)$$

где  $K$  – модуль объемного сжатия, и тензорное уравнение, связывающее тензор скоростей деформации и тензор скоростей изменения напряжений. Линейно-упругий материал характеризуется линейной зависимостью между напряжениями и деформацией. Поэтому для нахождения напряжений в точке, обусловленных деформациями в ней, применяется закон Гука, который в терминах приращений и напряжений можно записать в виде

$$\dot{S}_{ij} = (1 + \delta_{ij})\mu \left( \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \frac{\dot{V}}{V} \right), \quad (5)$$

где  $\mu$  – модуль сдвига.

Для замкнутой системы уравнений (2) – (5) ставится краевая задача с начальными и граничными условиями. Схема нагружения прямоугольного плоского образца с трещиной изображена на рис. 1. Образец нагружается динамической равномерно распределенной по торцам одноосной нагрузкой  $P(t)$ . Предполагается, что реализуется плоское напряженное состояние.

На рис. 1 введены следующие обозначения:  $\Omega$  – область, занятая материалом образца;  $\omega_1$  – свободные поверхности образца;  $\omega_2$  – поверхности приложения нагрузки  $P(t)$ ;  $\omega_3$  – поверхности берегов трещины.

Тогда система начальных уравнений и граничных условий имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i(x, y, z) = 0, \quad \rho(x, y, 0) = \rho^0, \quad U(x, y, 0) = 0 \end{aligned} \right\} (x, y) \in \Omega ;$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n(x, y, 0) = \sigma_\tau(x, y, t) = 0 \end{aligned} \right\} (x, y) \in \omega_1 \cup \omega_3 ; \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n(x, y, t) = P(t), \quad \sigma_\tau(x, y, t) = 0 \end{aligned} \right\} (x, y) \in \omega_2 ,$$

где индексы  $n$  и  $\tau$  определяют нормальное и касательное направления к поверхностям  $\omega_i$ .

Записанная система уравнений (2) – (5) вместе с начальными и граничными условиями (6) полностью определяют краевую задачу. Решение сформулированной задачи проводится модифицированным методом конечных элементов ММКЭ [1].

2. Многофункциональный метод ММКЭ [1] имеет конечно-разностную схему в лагранжевых переменных, подобную предложенной в работе [2], с использованием естественной аппроксимации пространственных производных и может применяться для решения динамических многомерных задач как механики жидкостей, так и МДТТ. ММКЭ предполагает наличие разностной сетки, состоящей из треугольных ячеек (Рис. 1). Градиенты давления и напряжений определяются в узлах разностной сетки; дивергенция вектора скорости находится в центрах расчетных ячеек на полуцелых шагах по времени. Пространственная производная аппроксимируется суммированием

нормальных компонент потока через границы ячеек таким образом, что локальная аппроксимационная ошибка имеет первый порядок точности по отношению к характерному размеру расчетной ячейки.

Сплошная среда разбивается на  $N$  конечных элементов в форме треугольника с  $L$  узлами (рис. 1). Имеем связанную модель конечных элементов, аппроксимирующую область расчета. При помощи функции формы исходная система дифференциальных уравнений (2) – (5) дискретизируется по времени и пространству. Полученная разностная схема аналогична соотношениям явной схемы типа "крест" [2]. При этом процесс численного интегрирования дифференциальных уравнений сводится к решению системы алгебраических уравнений. Искомые значения предыдущего слоя по времени  $t^n$  выступают как начальные условия для расчета НДС в момент  $t^{n+1}$ .

3. Так как никаким конечно-разностным методом невозможно рассчитать экстремально большие градиенты, возникающие непосредственно в вершине трещины, то для нахождения коэффициента интенсивности напряжений (КИН) используется специальная процедура, обрабатывающая параметры поля напряжений в окрестности вершины трещины. Вычисление КИН для неподвижной и движущейся трещины проводится с помощью  $J$ -интеграла [3]. Суть такого метода в том, что КИН полагается зависимым только от одного интеграла, взятого по контуру, охватывающему вершину трещины, причем значение интеграла практически не зависит от формы контура (рис. 1). В расчетах используется интеграл вида

$$J_1 = \int_{\Gamma+\Gamma_s} (Wn_1 - T_i U'_{i,1}) d\Gamma + \iint_A \rho^0 \dot{U}'_i U'_{i,1} dA, \quad (7)$$

где  $\Gamma$  – произвольный контур, окружающий вершину трещины;  $A$  – площадь, ограниченная контуром  $\Gamma$ ;  $\Gamma_s$  – отрезки  $CD$  и  $C'D'$  на берегах трещины;  $W$  – плотность энергии деформации;  $T_i = \sigma_{ij} n_j$ ;  $n_j$  – составляющая нормали к  $\Gamma$  в направлении  $x_j$ ;  $U'$  – перемещение.

Можно показать [4], что для неподвижной трещины

$$J_1 = \frac{K_I^2}{E'}, \quad (8)$$

где:  $K_I$  – коэффициент интенсивности напряжений:

$E' = E/(1 - \nu^2)$  - для плоской деформации,

$E$  – модуль Юнга.

Интегральная суть метода не требует сгущения расчетной сетки в окрестности трещины или использования специальных сингулярных элементов для расчета полей напряжения в окрестности трещины.

Для движущейся трещины зависимость между  $K_I$  и  $J_1$  более сложная [3]:

$$J_1 = \frac{1}{2\mu} K_I^2 F_I(v_T), \quad (9)$$

$$F_I(v_T) = \frac{\beta_1(1-\beta_2)}{D^2(v_T)} \left( 4\beta_1 - 1/\beta_1(1+\beta_2)^2 - 4(\beta_1 - \beta_2)(1+\beta_2)^2 / \sqrt{(1+\beta_1)(1+\beta_2)} \right), \quad (10)$$

$$D(v_T) = 4\beta_1\beta_2 - (1+\beta_2)^2, \quad (11)$$

где

$$\beta_1^2 = 1 - v_T^2/c_1^2, \quad \beta_2^2 = 1 - v_T^2/c_t^2,$$

$v_T$  – скорость движения трещины, определяемая экспериментально (330м/с), как и время страгивания (60 мкс);  $c_l, c_t$  – скорости продольных и поперечных волн.

Моделирование распространения трещин выполнялось методом последовательной релаксации узлов расчетной сетки [4]. Пусть в некоторый момент времени вершина трещины  $C$  расположена между узлами разностной сетки  $B$  и  $D$  (рис. 1).  $b$  и  $d$  – проекции отрезков  $BC$  и  $BD$  соответственно на плоскость симметрии. К образцу приложены растягивающие усилия, действующие на узлы сетки. Узлы перед вершиной трещины в силу симметрии закреплены от вертикальных перемещений. Суть рассматриваемого подхода состоит в том, что пока трещина не достигла узла  $D$ , считается, что на узел  $B$  кроме силы обусловленной приложенной к образцу нагрузкой действует сила  $F$ , направленная в противоположную нагрузке сторону. Когда вершина трещины достигнет узла  $D$ , эта сила исчезает, а по мере приближения точки  $C$  к узлу  $D$  сила  $F$  уменьшается до нуля по формуле

$$\frac{F}{F_0} = \left( 1 - \frac{b}{d} \right), \quad (12)$$

где:  $F_0$  - величина узловой силы в узле  $B$  в тот момент, когда в нем находилась вершина трещины.

4. С возрастанием роли численного моделирования в изучении поведения материалов и конструкций при интенсивных динамических нагружениях важным является вопрос о достоверности получаемых результатов. В связи с этим в вычислительной практике широко и используется решение тестовых задач. Тестирование расчетов должно определить как качество самого решения, так и проверить заложенную в численный алгоритм модель среды.

В рамках выбранной модели проверить вычислительную методику можно сравнением полученных результатов с известными аналитическими решениями и с результатами полученными различными численными методами при прочих равных условиях.

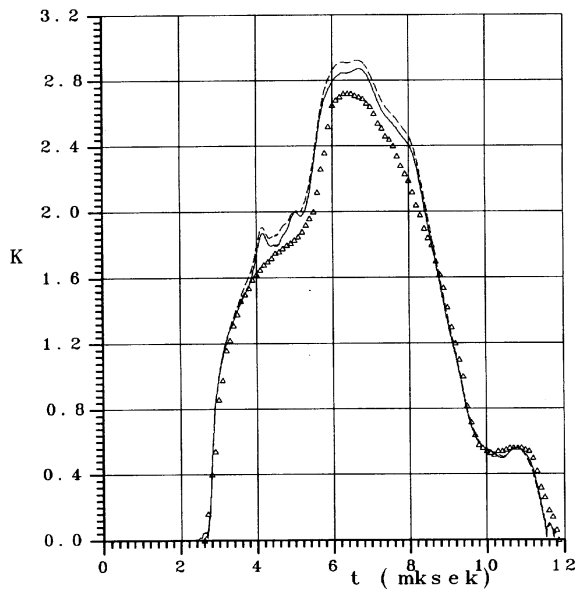


Рис. 2

Совпадение результатов говорит в пользу достоверности расчетов. Адекватность реальным физическим условиям выбранной модели среды в численном методе наиболее эффективно проверяется сравнением численных результатов с экспериментальными данными.

Проверка расчетного метода проводилась в сравнении решения тестовой задачи с решением другим численным методом, приведенным в работе [5].

Рассматривается прямоугольная пластина с центральной трещиной в условиях плоского напряженного состояния (рис. 1). Она подвержена динамической одноосной равномерно распределенной на концах нагрузке  $P(t)$ , заданной в виде функции Хевисайда. Граничные условия ставятся соответствующими плоскому нагружению (7). Пластина предполагается изготовленной из линейно-упругого материала. Расчет значений КИН для данного образца представлен на рис. 2. Приведенная в работе [5] расчетная кривая КИН хорошо согласуется с данными, полученными на основании широко известной аналитической формулы нахождения асимптотического решения для малых времен, и часто используется в качестве теста другими авторами [6, 7]. На рис. 2 данные работы [5] изображены треугольниками. Сплошной и пунктирной линиями показаны расчетные кривые, полученные методом данной работы. Наблюдается хорошее совпадение результатов. Сплошная кривая получена с помощью  $J$ -интеграла с контуром интегрирования в 2 раза большего размера, чем был взят для получения результатов, отмеченных пунктирной линией (рис. 2). Незначительность отличия этих кривых подтверждает практическую независимость  $J$ -интеграла от контура интегрирования.

5. Для иллюстрации возможностей предложенной методики, был проведен расчет по данным экспериментального исследования нагружения образца с трещиной. Условия и результаты эксперимента, а также физико-механические параметры нагружаемого образца по дробно описаны в работе [8]. Нагрузка  $P(t)$ , использовавшаяся в расчете, представлялась в виде ломаной линии, максимально приближенной к реальной экспериментально измеренной нагрузке.

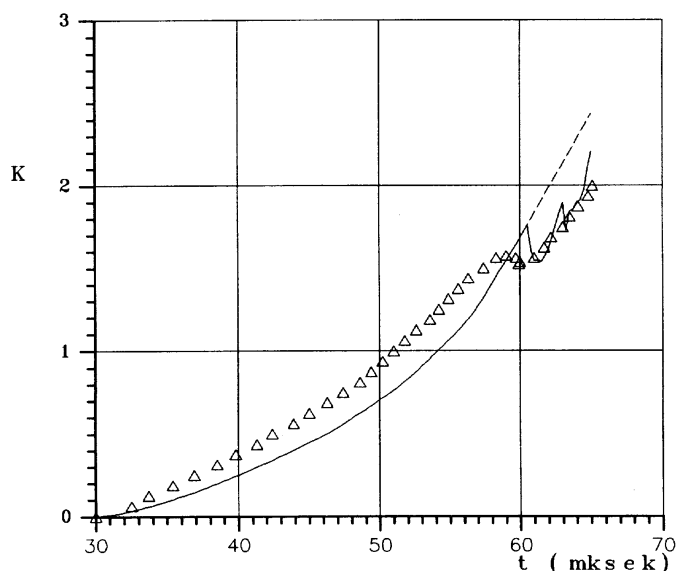


Рис. 3

к реальной экспериментально измеренной нагрузке.

На рис. 3 треугольниками отмечены значения КИН в зависимости от времени полученные из эксперимента. В момент времени  $t = 60$  мкс наблюдается страгивание вершины трещины, что сказывается на характере поведения экспериментально полученных значений КИН (рис. 3). Неучет страгивания трещины в расчетах (пунктирная линия) приводит к получению завышенных значений КИН, что видно из рисунка. Применение же метода последовательного освобождения узлов, моделирующего движение трещины, позволяет более точно численно описывать физику рассматриваемого процесса (сплошная линия на рис. 3). Наблюдаемые осцилляции имеют численный характер и зависят от размеров расчетных ячеек и от совершенства метода моделирования движения трещины.

Проведенная проверка при решении задач в сравнении с данными эксперимента и результатами, полученными другими методами имела цель опробовать работоспособность численной методики. Результаты тестовых расчетов позволяют сделать вывод о том, что разработанный численный метод ММКЭ дает достаточно достоверные результаты при расчете НДС упругих тел как со статическими, так и с движущимися трещинами при динамическом нагружении. На основании этого можно говорить о пригодности предложенного метода для решения конкретных практических задач динамического нагружения различных конструкций с наличием дефектов в виде трещин.

### Список использованной литературы

1. Корнеев А. И., Николаев А. П., Шиповский И. Е. Приложение метода конечных элементов к задачам соударения твердых деформируемых тел // 7 Всесоюз. конф. "Численные методы решения задач теории упругости и пластичности. – Новосибирск, 1982. – С. 122-129.
2. Вычислительные методы в гидродинамике. / Перев. под ред. Григоряна С. С. – М.: Мир, 1967. – 306 с.
3. Nishioka N., Alturi S. N. Path – independent integrals, energy release rates, and general solutions of near – tip fields in mixed – mode dynamic fracture mechanics // Eng. Fract. Mech. – 1983. – 18, № 1. P. 1-22.
4. Вычислительные методы в механике разрушения. / Перев. под ред. Алтури С. – М.: Мир, 1990. – 391 с.
5. Chen Y. N. Numerical computation of dynamic stress intensity factors by a lagrangian finite – difference method. // Eng. Fract. Mech. – 1975. – 7, № 4. P. 617-653.
6. Алексейчук А. А., Костандов Ю. А., Локишина Л. Я. Численный расчет напряженно-деформированного состояния в вершине трещины при динамической нагрузке. // Динамические системы. Респ. научн. сб. 1994. – Вып. 13. – Киев: КГУ. – С. 61–65.
7. Партон В. З., Борисковский В. Г. Динамическая механика разрушения. – М.: Машиностроение, 1985. – 263 с.
8. Шевляков Ю. А., Костандов Ю. А., Рыжяков А. Н. Динамическое растяжение пластины со стационарной центральной трещиной. // Настоящий сборник.

Поступила в редколлегию 17.02.97