

МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

УДК 539.3

В. М. СЕЙМОВ, д.т.н., проф., А. Н. ТРОФИМЧУК, канд. техн. наук.,
О. А. САВИЦКИЙ, канд. техн. наук., Н. П. ЕРМОЛЕНКО, инж.
Ин-т гидромех. НАНУ.

ДИНАМИКА МОРСКОЙ ПЛАТФОРМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С ОСНОВАНИЕМ И ВОДНОЙ СРЕДОЙ

Рассматриваются нестационарные колебания системы сооружение–грунт–слой воды. Расчетная схема сооружения состоит из круглой жесткой фундаментной плиты и надстройки в виде вязкоупругого вертикального стержня с сосредоточенными массами. Учитывается взаимодействие фундамента с вязкоупругим полупространством: решается динамическая контактная задача методом ортогональных полиномов. Методика разработана для принятия в расчет взаимодействия надфундаментного строения цилиндрической формы со слоем воды (для моделирования динамики нефтедобывающей платформы). В качестве нагрузки принято сейсмическое воздействие, задаваемое аналоговой акселерограммой площадки. Разработана вычислительная система для численного моделирования колебаний и определения усилий, перемещений, ускорений и контактных напряжений.

Морские платформы, как правило, представляют собой сложные конструкции и при их расчетах прибегают к различного рода схематизациям и упрощениям (см., например, [1],[2]). Ниже рассмотрим горизонтально-вращательные колебания стационарной платформы гравитационного типа (монопод), основными конструктивными элементами которой являются: круглая жесткая фундаментная плита (а) радиусом a и высотой \bar{h} , вертикальный полый упругий цилиндр (б) радиуса \bar{r}_0 , надводное строение (с) (рис. 1). Высота слоя воды – \bar{H} . Примем расчетную схему, полагая, что масса всей конструкции сосредоточена в фундаментной плите (M_0), в нескольких сечениях по высоте цилиндра и надстройке (M_p) (рис. 2). Расстояние от верха фундамента до соответствующей массы (узла p) – l_p . Платформа опирается на деформируемое инерционное основание и при колебаниях взаимодействует как с основанием, так и со слоем жидкости. Модели основания могут быть различными: упругое, вязкоупругое, водонасыщенное, слоистое. Воздействия на платформу принимаются нестационарными во времени: горизонтальные сейсмические, задаваемые акселерограммой площади

ки; волновые; ледовые. В результате решения динамической задачи необходимо найти: касательные и нормальные напряжения по контуру фундамента с основанием, линейные, угловые перемещения и ускорения фундамента, горизонтальные перемещения, ускорения, изгибающие моменты и перерезывающие силы в сечениях цилиндра, гидродинамические воздействия по боковой поверхности при его колебаниях в слое жидкости.

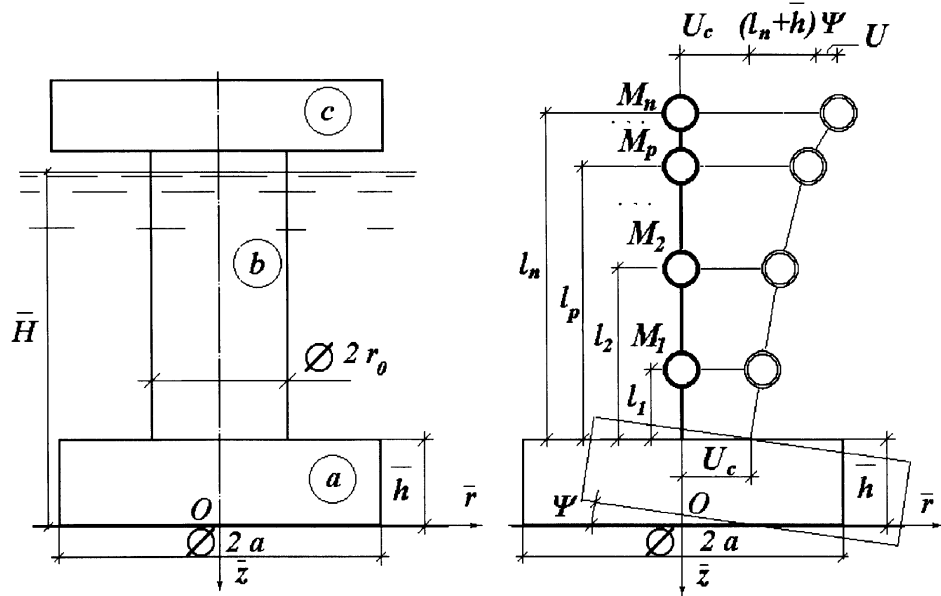


Рис.1

Рис.2

Уравнения движения платформы образуют систему уравнений для отдельных ее элементов и окружающей среды: сосредоточенных масс по высоте платформы, фундаментной плиты, основания, слоя жидкости.

Уравнение движения сосредоточенной массы в узле p имеет вид [3]:

$$M_p \frac{d^2}{dt^2} [U_c(t) + (\bar{h} + l_p)\Psi(t) + U_p(t)] + \exp(i\gamma_c) \sum_{q=1}^n \frac{U_q(t)}{\delta_{pq}} = D_p(t)_c + D_p(t), \quad (1)$$

где δ_{pq} – прогиб стержня в точке p от единичной силы, приложенной в точке q ; γ – коэффициент поглощения энергии в материале стержня (цилиндра); $U_c(t)$ – горизонтальное перемещение подошвы фундамента; $\Psi(t)$ – угол поворота фундамента; $U_p(t)$ – прогиб стержня в узле p ; $D_p(t)_c$ и $D_p(t)$ – нагрузки, действующие на цилиндр и отнесенные к узлу p . Нагрузка $D_p(t)_c = -M_p g_c(t)$ обусловлена кинематическим (сейсмическим) воздействием, $g_c(t)$ – заданное ускорение площадки

при горизонтальном сейсмическом воздействии; нагрузка $D_p(t)$ может включать в себя: $Q_u(t)$ – гидродинамическое давление на боковую поверхность цилиндра, возникающее в результате взаимодействия с водной средой и пропорциональное перемещению платформы; ударное воздействие морской волны, а также воздействие, обусловленное наличием ледового поля на узел, расположенный вблизи поверхности моря и пропорциональное перемещению платформы на этом уровне.

Инерционные и внешние силы, действующие в узлах стержня, определяются формулой

$$F_p(t) = -\exp(i\zeta) \sum_{q=1}^n \frac{U_q(t)}{\delta_{pq}} + D_p(t). \quad (2)$$

Зная силы (2), можно определить силу $Q_0(t)$ и момент $M_0(t)$ в заделке стержня, т.е. нагрузки, которые передаются на фундамент.

Взаимодействие платформы с водной средой учитывается путем определения зависимости гидродинамического давления на боковую поверхность цилиндра от перемещений платформы. Пользуясь результатами работы [6], запишем зависимость между трансформантами Лапласа по времени указанных величин для случая горизонтального смещения цилиндра

$$\bar{Q}(s) = s^2 \bar{U}_x(s) \mu \frac{\rho}{\rho_0} \frac{8\bar{x}_0 \bar{H}^2}{\pi a^2} \times \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{K_1(\alpha)}{m^2 v_m K_1'(\alpha)}, \quad \alpha = \bar{x}_0 v_m / \bar{H}; \quad (3)$$

$$v_m = \left[(m\pi/2)^2 + s^2 \left(\frac{c_2 \bar{H}}{c_0 a} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь s – безразмерный параметр преобразования Лапласа (по безразмерному времени $t = \bar{t} c_2 / a$, \bar{t} – время, c_2 – скорость поперечной волны в упругой среде), μ – постоянная Ламе материала основания, ρ/ρ_0 – отношение плотностей воды и основания, c_0 – скорость звука в воде, $K_1(\alpha)$ – функция Макдональда. Зависимость (3) учитывается при решении уравнения (1). По аналогии с (3) можно получить зависимость между угловыми перемещениями цилиндра и гидродинамическим давлением на его поверхности.

Под действием рассмотренных нагрузок фундаментная плита будет совершать связанные горизонтально-вращательные колебания. По аналогии с прямоугольной плитой [4], [5] уравнения колебаний круглого фундамента имеют вид

$$\begin{aligned}
2\pi a m_0 \mu \frac{d^2 U_c}{dt^2} &= \left(1 - \frac{\bar{h}}{a} n_0\right) Q_0(t) \left(1 + \frac{\bar{h}}{a} n_0\right) Q_R(t) - \\
&- \frac{2}{a} n_0 [\mathcal{M}_0(t) - \mathcal{M}_R(t)] + D_0(t)_c; \\
\frac{4}{3} a^3 j_y \mu \frac{d^2 \Psi}{dt^2} &= \frac{\bar{h}}{2} [Q_0(t) + Q_R(t)] + \mathcal{M}(t) - \mathcal{M}_R(t),
\end{aligned} \tag{4}$$

где $\Psi(t)$ – угол поворота фундамента, $Q_R(t)$ и $\mathcal{M}_R(t)$ – соответственно равнодействующая касательных и момент нормальных (относительно диаметра) контактных напряжений; $D_0(t) = -M_0 g_c(t)$ – сейсмическое воздействие на фундамент;

$$m_0 = \frac{M_0}{2\pi a^3 \rho_0}; \quad j_y = \frac{3}{4} \frac{J_y}{a^5 \rho}; \quad n_0 = \frac{\bar{h} a M_0}{4 J_y},$$

M_0 – масса фундамента; J_y – момент инерции его относительно горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести фундамента.

В результате решения контактной задачи для круглого фундамента на упругом полупространстве необходимо определить однонаправленные касательные напряжения $\tau_x(r, t)$ и антисимметричные относительно диаметра нормальные напряжения $p(r, \varphi, t)$. Указанные напряжения будем искать в виде разложений по ортогональным многочленам [4]

$$\begin{aligned}
\tau_x(r, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k}(t) \frac{P_{2k}(\sqrt{1-r^2})}{\sqrt{1-r^2}}; \\
p(r, \varphi, t) &= \cos \varphi \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+1}(t) \frac{\tilde{P}_{2k+1}(r)}{\sqrt{1-r^2}} \\
&\quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi),
\end{aligned} \tag{5}$$

где $B_{2k}(t)$ и $A_{2k+1}(t)$ – неизвестные коэффициенты, зависящие от времени, $P_{2k}(\sqrt{1-r^2})$ – преобразованные полиномы Лежандра, $\tilde{P}_{2k+1}(r)$ – специально построенные нечетные многочлены, удовлетворяющие условию ортогональности в области круга

$$\int_0^1 P_{2k+1}(r) P_{2n+1}(r) \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr = \begin{cases} \frac{\varepsilon_k \sqrt{\pi} \Gamma(k+1)}{2^{k+1} \Gamma(k+1/2)} \frac{1}{4k+3}, & (n=k); \\ 0, & (n \neq k); \end{cases} \tag{6}$$

$\varepsilon_0 = 1/2$; $\varepsilon_k = 1$ ($k \geq 1$). Первые три многочлена $\tilde{P}_{2k+1}(r)$ имеют вид

$$\begin{aligned}\tilde{P}_1(r) &= r; \quad \tilde{P}_3(r) = r - 1,25r^3; \\ \tilde{P}_5(r) &= r - 7r^3/2 + 21r^5/8.\end{aligned}\quad (7)$$

При использовании разложений (5) имеем

$$Q_R(t) = 2\pi a^2 B_0(t); \quad M_R(t) = \frac{2}{3}\pi a^3 A_1(t). \quad (8)$$

Уравнения движения фундаментной плиты платформы (4) необходимо решать совместно с уравнениями движения основания, которое при имеем в виде упругого полупространства. Решение таких уравнений в цилиндрических координатах (r, z, φ) при разложении по угловой координате φ приведено для гармонических колебаний в работе [8]. Для нестационарных колебаний, например, радиальная составляющая перемещений определяется выражением (в изображениях Лапласа)

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \cos(m\varphi) \int_0^\infty \{ [-B \exp(-z\alpha_1) - C\alpha_2 \exp(-z\alpha_2)] J_m(r\xi) + \\ &+ D \frac{m}{r} J_m(r\xi) \exp(-z\alpha_2) \} \alpha \xi, \end{aligned}\quad (9)$$

где $J_m(r\xi)$ – функция Бесселя; $\alpha_1 = \sqrt{\xi^2 + \beta^2 s^2}$, $\alpha_2 = \sqrt{\xi^2 + s^2}$; β – отношение скоростей продольной и поперечной упругих волн в полупространстве; B , C , D – константы, которые находятся из условий на границе полупространства. Аналогичный вид имеют вертикальная \bar{w} и тангенциальная \bar{v} составляющие перемещений. Граничными условиями для определения указанных констант будут условия при $z=0$ напряжений в упругом полупространстве напряжениям (5) в пределах круга ($0 \leq r \leq 1$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$) и нулю вне его. После их определения могут быть получены выражения для перемещений поверхности основания. Например, однонаправленные горизонтальные перемещения от нагрузки $\tau_x(r, t)$ и вертикальные – от нагрузки $p(r, \varphi, t)$ (5) будут равны

$$\begin{aligned}\bar{u}_x(r, \varphi, s)_\tau &= \frac{a}{2\mu_0} \int_0^\infty \left[s^2 \sqrt{\xi^2 + s^2} / F(\xi, s) + 1 / \sqrt{\xi^2 + s^2} \right] \times \bar{\tau}_x(\xi, s) \xi J_0(r\xi) d\xi; \\ \bar{w}(r, \varphi, s)_p &= \frac{a}{\mu_0} \int_0^\infty s^2 \sqrt{\xi^2 + s^2} / F(\xi, s) \times \bar{p}(\xi, \varphi, s) \xi J_1(r\xi) d\xi,\end{aligned}\quad (10)$$

где $F(\xi, s) = (2\xi^2 + s^2)^2 - 4\xi^2 \alpha_1 \alpha_2$,

$$\begin{aligned}\bar{r}_x(\xi, s) &= \frac{1}{\sqrt{2\xi}} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{B}_{2k}(s) \frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(k+1)} J_{2k+1/2}(\xi); \\ \bar{p}(\xi, \varphi, s) &= \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{A}_{2k+1}(s) \frac{k!}{2^{2k}} J_{2k+3/2}(\xi) -\end{aligned}\quad (11)$$

преобразования Лапласа и Ханкеля нулевого и первого порядков функций (5), $J_{2k+1/2}(\xi)$ – функция Бесселя полуцелого индекса. Подобно (11), можно записать и выражения для $\bar{u}_x(r, \rho, s)_p$ и $\bar{w}(r, \varphi, \rho, s)_\tau$. Заметим, что функции $J_0(r\xi)$ и $J_1(r\xi)$ можно разложить в ряды по многочленам $P_{2n}(\sqrt{1-r^2})$ и $P_{2n+1}(r)$:

$$\begin{aligned}J_0(r\xi) &= \sqrt{2/\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1/2)\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n+1)} J_{2n+1/2}(\xi) P_{2n}(\sqrt{1-r^2}); \\ J_1(r\xi) &= \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n(4n+3)}{2^{2n}} (2n+1)! \times J_{2n+3/2}(\xi) P_{2n+1}(r), \quad (0 \leq r \leq 1).\end{aligned}\quad (12)$$

Суммарные однонаправленные горизонтальные перемещения от нагрузки (5) с учетом (11) и (12) определяются формулой

$$\begin{aligned}\bar{u}_x(r, \rho, s) &= \frac{a}{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{B}_{2k}(s) b_{2k+1/2, 2n+1/2}(s) - \bar{A}_{2k+1}(s) a_{2k+3/2, 2n+1/2}(s)] \times \\ &\times P_{2n}(\sqrt{1-r^2}),\end{aligned}\quad (13)$$

где

$$b_{2k+1/2, 2n+1/2}(s) = \frac{a}{\mu} \int_0^{\infty} \left[\frac{\xi^2 \sqrt{\xi^2 + s^2}}{F(\xi, s)} + 1/\sqrt{\xi^2 + s^2} \right] J_{2k+1/2}(\xi) J_{2n+1/2}(\xi) d\xi; \quad (14)$$

$$\begin{aligned}a_{2k+3/2, 2n+1/2}(s) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(2n+1)\Gamma(n+1/2)}{2^{2k}\Gamma(n+1)} \times \\ &\times \int_0^{\infty} \xi \frac{2\xi^2 + s^2 - 2\alpha_1\alpha_2}{F(\xi, s)} J_{2k+3/2}(\xi) J_{2n+1/2}(\xi) d\xi.\end{aligned}\quad (15)$$

По аналогии можно записать и выражение для $\bar{w}(r, \varphi, \rho, s)$. При этом следует учесть, что

$$\bar{\Psi}(s) = \bar{w}(r, \varphi, s) / (ar \cos \varphi). \quad (16)$$

Взаимодействие фундамента с основанием будет иметь место, если соблюдаются контактные условия (равенство горизонтальных и вертикальных перемещений подошвы фундамента соответствующим перемещениям поверхности основания):

$$\bar{U}_x(s) = \bar{u}_x(r, \rho, s); \quad \bar{W}(r, \varphi, s) = \bar{w}(r, \varphi, \rho, s), \quad (0 \leq r \leq 1; 0 \leq \varphi \leq 2\pi). \quad (17)$$

Удовлетворяя условиям (17), подставляем перемещения (13) и (16) в (4) и в (1) (в изображениях Лапласа), приравниваем коэффициенты при многочленах одинаковых порядков слева и справа от знака равенства. В результате задача сводится к бесконечной системе алгебраических уравнений (в области изображений Лапласа), которую запишем в матричной форме

$$\mathcal{A}\chi = \mathcal{B} \quad (18)$$

где \mathcal{A} – матрица коэффициентов вида (14), (15), включающая ряды по функциям Макдональда (3); χ – вектор искомых функций $\bar{B}_{2k}(s)$, $\bar{A}_{2k+1}(s)$, $\bar{U}_p(s)$, \mathcal{B} – вектор свободных членов $\bar{D}_p(s)$, $\bar{Q}_p(s)$.

Обращение преобразования Лапласа выполняется численно, с помощью интеграла Фурье [4]. Сначала рассматриваются единичное сейсмическое или волновое воздействие, а затем выполняется сверка с заданной акселерограммой или с функцией, описывающей ударное воздействие морской волны.

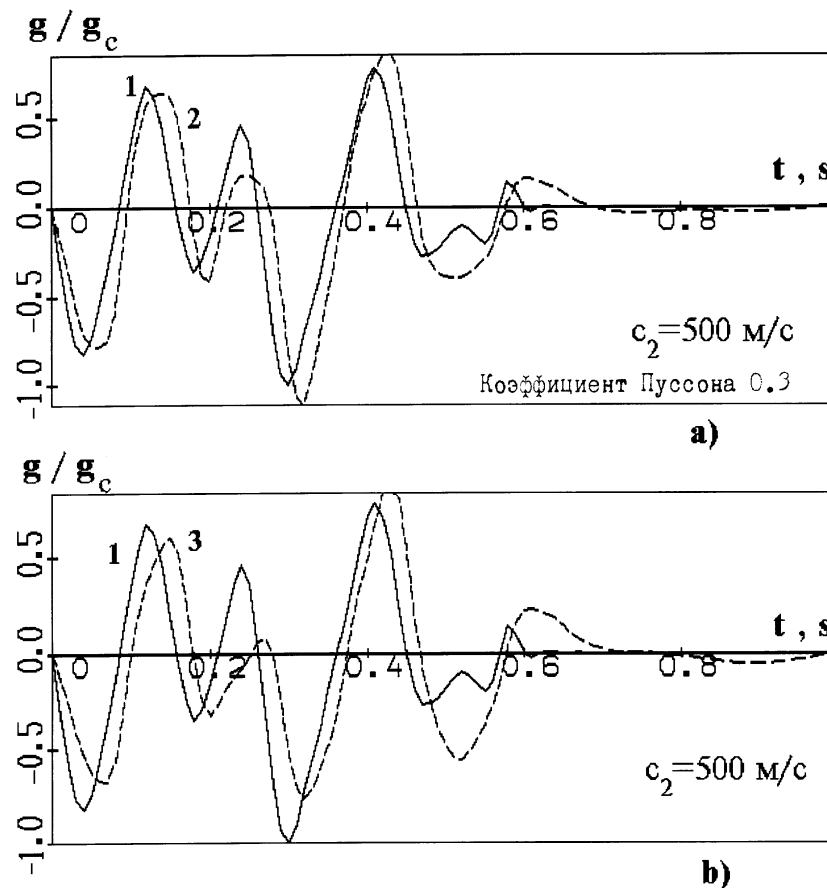


Рис. 3 Акселерограмма (1), ускорение подошвы (2) и верха фундамента (3).

Изложенная методика реализована в виде вычислительной системы для ПЭВМ. Здесь предлагаются вниманию некоторые результаты расчета на горизонтальное сейсмическое воздействие, задаваемое акселерограммой площадки. В качестве примера рассмотрим платформу с параметрами: диаметр бетонной фундаментной плиты $2a=40$ м, толщина плиты $\bar{h}=8$ м, плотность $\rho=2400$ кг/м³; диаметр вертикальной цилиндрической части $2\bar{r}_0=16$ м; изгибная жесткость цилиндра $EI=2,73 \times 10^{13}$ Па м⁴; $\gamma=0,1$. Глубина моря $H=34$ м, плотность грунта $\rho_0=1800$ кг/м³, $c_2=500$ м/с. Условно принято, что половина массы цилиндра сосредоточена в верхней части платформы, а вторая половина добавлена к массе фундамента. Задана сосредоточенная масса $M_1/M_0=0,4$, $l_1=30$ м. При расчете рассмотрен фрагмент реальной акселерограммы с шагом по времени 0,02 с.

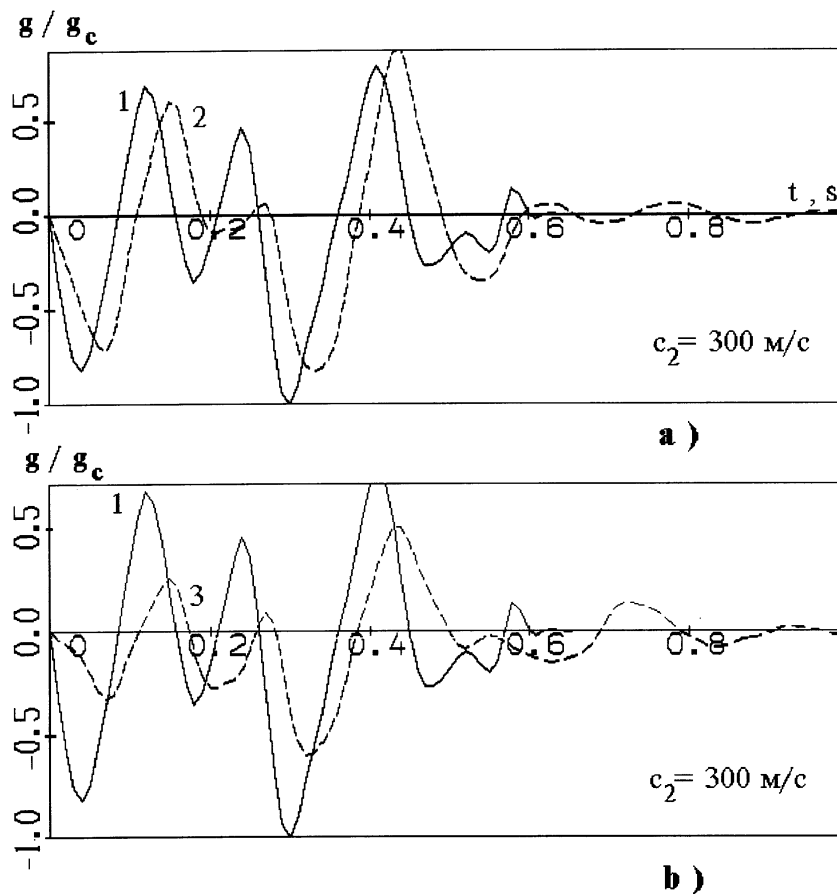


Рис. 4 Акселерограмма (1), ускорение подошвы (2) и верха фундамента (3).

Безразмерные параметры принимают значения $m_0=0,267$, $j_y=0,331$, $n_0=0,304$. На рис. 3 представлены графики изменения во времени ускорений платформы (в долях максимального сейсмического ускорения g_c) на уровне подошвы (кривая 2) и на уровне верха фундамента (кривая 3) в сравнении с акселерограммой площадки (кривая 1). Скорость упругой поперечной волны в основании $c_2=500$ м/с. На рис. 4 представлены результаты, аналогичные графикам рис. 3, при $c_2=300$ м/с. Максимальное горизонтальное ускорение подошвы фундамента при $c_2=500$ м/с превышает максимум акселерограммы, что согласуется с данными других авторов [7]. Расчет при $c_2=300$ м/с дает ускорение подошвы, не превышающее максимума акселерограммы.

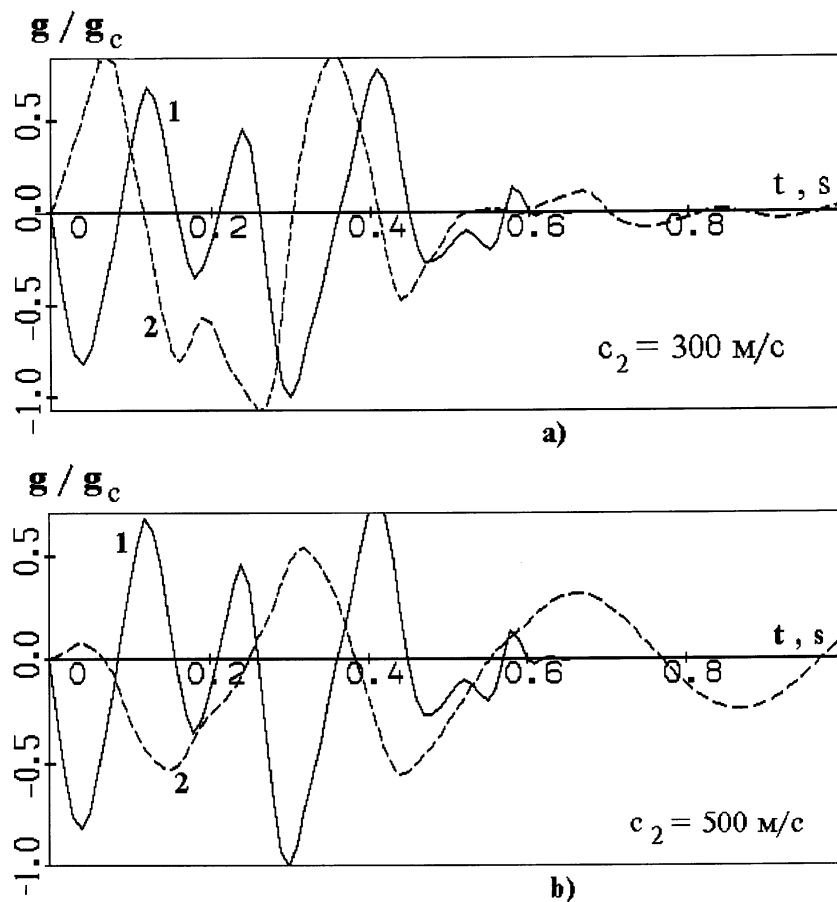


Рис. 5 Акселерограмма (1) и ускорение верхней массы (2)

На рис. 5а приведена акселерограмма верхнего конца платформы (штриховая линия 2) также в сравнении с акселерограммой площадки (кривая 1) для $c_2=300$ м/с, а на рис. 5.б. – то же для $c_2=500$ м/с. Здесь на примере изменения параметра c_2 показано, что учет свойств

основания, в частности его жесткости, является существенным при изучении динамики конструкции.

Проведенные расчеты по другим параметрам (варьирование отношения величины масс, их положения, жесткости стержня, размеров фундамента, радиуса стержня, высоты слоя и др.) показывают возможность выполнения подробного численного анализа динамики элементов платформы. Разработанные методика и пакет программ в настоящее время совершенствуются и позволяют исследовать нестационарную динамику морских платформ и других уникальных объектов при различных параметрах и разного вида динамических воздействиях.

Список использованной литературы

1. Бреббиа К., Уокер С. Динамика морских сооружений. – Л.: Судостроение, 1983. – 230 с.
2. Доусон Т. Проектирование сооружений морского шельфа. – Л.: Судостроение, 1986. – 286 с.
3. Назаренко А. Г. Метод инженерного анализа сейсмических сил. – Ереван: Изд-во АН Арм ССР, 1959. – 286 с.
4. Сеймов В. М. Динамические контактные задачи. – Киев: Наук. думка, 1976. – 284с.
5. Сеймов В. М., Островерх Б. Н., Ермоленко А. И. Динамика и сейсмостойкость гидротехнических сооружений. – Киев: Наук. думка, 1983. – 318 с.
6. Шульман С. Г. Расчеты сейсмостойкости гидросооружений с учетом влияния водной среды. – М.: Энергия, 1976. – 336 с.
7. Хачиян Э. Е., Амбарцумян В. А. Динамические модели сооружений в теории сейсмостойкости. – М.: Наука, 1981. – 204 с.
8. Sezawa K. Further Studies on Rayleigh Waves Having Some Azimuthal Distribution / Bulletin of the Earthquake Research Institute, Tokyo, Japan, 1929, 6, pp. 1–18.

Поступила в редколлегию 18.02.96