

УДК 534.6.013.42

И. Т. СЕЛЕЗОВ, д-р физ.-мат. наук, О. В. ЗВОНАРЕВА, асп.,
Ин-т гидромех. НАН Украины

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИМПУЛЬСА В УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ, ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Исследуется задача распространения волн, возбуждаемых импульсом давления в упругой цилиндрической оболочке, заполненной вязкой жидкостью. Такая задача моделирует распространение пульсовой волны давления в кровеносном сосуде. Задача решается методом интегрального преобразования Лапласа, что дает возможность построить аналитические решения в пространстве изображений. Переход к оригиналам реализуется методом численного обращения преобразования Лапласа. Проведен анализ результатов при различных значениях параметров.

Задача распространения пульсового давления сердца в кровеносных сосудах имеет большое значение для понимания этого явления и условий, приводящих к зарождению и формированию локальных неоднородностей на стенках сосудов, таких, как бляшки, стенозы и др. [1-4]. Эта задача была предметом многих исследований длительное время и представляет большой интерес в настоящее время [5-11].

Задача распространения пульсового давления сердца в кровеносных сосудах имеет большое значение для понимания этого явления и условий, приводящих к зарождению и формированию локальных неоднородностей на стенках сосудов, таких, как бляшки, стенозы и др. [1-4]. Эта задача была предметом многих исследований длительное время и представляет большой интерес в настоящее время [5-11].

Осесимметричные движения стенки оболочки описываются уравнениями теории вязко-упругих оболочек

$$\begin{aligned} L_1 u_x + L_2 u_r &= N_x, \\ L_3 u_x + L_4 u_r &= N_r, \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\begin{aligned}
L_1 &= \left(\frac{E}{1-\nu_0^2} + \frac{4\eta(3\zeta + \eta)}{3\zeta + 4\eta} \frac{\partial}{\partial t} \right) h \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \rho_0 h \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \\
L_2 &= L_3 = - \left(\frac{E\nu_0}{1-\nu_0^2} + \frac{2\eta(3\zeta + 2\eta)}{3\zeta + 4\eta} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{h}{R} \frac{\partial}{\partial x}, \\
L_4 &= h \left(\frac{E}{1-\nu_0^2} + \frac{4\eta(3\zeta + \eta)}{3\zeta + 4\eta} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{h^2}{12} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{1}{R^2} \right) + \rho_0 h \frac{\partial^2}{\partial t^2},
\end{aligned}$$

x – продольная координата, t – время, u_x – продольное перемещение, u_r – радиальное перемещение, R – радиус сосуда, h – толщина стенки, E – модуль Юнга, ν_0 – коэффициент Пуассона, η и ζ – коэффициенты вязкости стенки оболочки [12, 13].

Силы N_x и N_r , действующие на стенку со стороны жидкости, выражаются формулами

$$\begin{aligned}
N_x &= \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right) \Big|_{r=R}, \\
N_r &= \left[-p + \lambda \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{v_r}{r} \right) + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \right] \Big|_{r=R},
\end{aligned} \tag{2}$$

где p – давление, v_x, v_r – компоненты скорости течения, μ и λ – коэффициенты вязкости. Эти силы определяются из решений гидродинамических уравнений.

Осесимметричные движения жидкости описываются уравнениями Навье-Стокса в цилиндрической системе координат $r\theta x$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \\
= \nu \left[\frac{4}{3} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} \right) \right],
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_x \frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \\
= \nu \left[\frac{4}{3} \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{4}{3r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{4}{3} \frac{\partial v_r}{r^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{3} \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right) \right],
\end{aligned} \tag{4}$$

где ν – кинематический коэффициент вязкости, ρ – плотность.

Уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_r}{\partial r} + \rho \frac{v_r}{r} + \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (5)$$

Состояние жидкости при сжатии описывается законом Гука с объемным модулем упругости $K = \rho \frac{\partial p}{\partial \rho}$:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (6)$$

На поверхности раздела стенки и жидкости должны удовлетворяться следующие условия сопряжения:

$$v_r = \frac{\partial u_r}{\partial t}, \quad v_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} \quad \text{при } r = R. \quad (7)$$

Кроме того, каждое решение уравнений гидродинамики должно удовлетворять условию регулярности, например $v_r = 0$ при $r = 0$.

Чтобы упростить уравнения (3) – (5) мы оцениваем порядки членов, принимая в качестве масштабов продольную длину l , среднюю по поперечному сечению скорость V и скорость звука a_0 . При таком масштабировании первые два члена в (3) имеют порядки

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} \sim \frac{Va_0}{2}, \quad v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \sim \frac{V^2}{l},$$

откуда видно, что при $V \ll a_0$ второй член в левой части уравнения (3) может не учитываться. Аналогично можно показать, что третьим членом также можно пренебречь.

Порядки членов в квадратных скобках в правой части уравнения (3) при $m = r/l$ таковы:

$$\frac{4}{3} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \sim \frac{4V}{3l^2}, \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} \sim \frac{V}{m^2 l^2}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial r} \sim \frac{V}{m^2 l^2}$$

Поскольку обычно $m \ll 1$, то первый из вышеуказанных членов пренебрежимо мал по сравнению со вторым и третьим членами.

При $v_x \gg v_r$ уравнение (4) может быть исключено полностью в предположении равномерного распределения давления по поперечному сечению. Одновременно член $v_r \frac{\partial \rho}{\partial r}$ исключается из уравнения (5), а

для случаев $V \ll a_0$ член $v_x \frac{\partial \rho}{\partial x}$ исключается как малый в сравнении с другими членами уравнения.

На основе гипотезы квазистационарности [14] для ламинарного течения может быть записано следующее соотношение:

$$\mu \left. \frac{\partial v_x}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{4\mu}{R} V, \quad (8)$$

где средняя скорость V определяется зависимостью

$$\pi R^2 V = \int_0^R 2\pi r v_x dr. \quad (9)$$

Предполагается, что закон квазистационарного состояния может быть обобщен на нестационарное течение и, как следствие, скорость $\partial u_x / \partial t$ принимается значительно меньшей средней скорости V . Кроме того, радиальное перемещение стенки u_r предполагается малым по сравнению с радиусом R .

С этими упрощениями система уравнений гидроупругости в безразмерной форме принимает вид

$$L_1^* \bar{u}_x + L_2^* \bar{u}_r = -\frac{4k_0}{\text{Re}} \bar{V}, \quad (10)$$

$$L_3^* \bar{u}_x + L_4^* \bar{u}_r = k_0 \bar{p}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = -\frac{8}{\text{Re}} \bar{V}, \quad (12)$$

$$a \frac{\partial \bar{p}}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + 2 \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \tau} = 0, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} L_1^* &= \left(1 + 2A \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - u^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}, & L_2^* &= L_3^* = -\left(v_0 + B \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \frac{\partial}{\partial x}, \\ L_4^* &= \left(1 + 2A \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \left(\frac{h^2}{12R^2} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 1\right) + u^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}, & A &= k \frac{3\zeta + \eta}{3\zeta + 4\eta}, \\ B &= k \frac{3\zeta + 2\eta}{3\zeta + 4\eta}, & k &= 2\eta \frac{v_0}{R} \frac{1 - v_0^2}{E}, & u &= \frac{v_0}{c_0}, & c_0^2 &= \frac{E}{\rho_0(1 - v_0^2)}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$k_0 = \frac{\rho_0 R}{\rho h} u^2, \quad \zeta = \frac{2}{3} \eta, \quad a = \frac{\rho v_0^2}{k}, \quad \bar{p} = \frac{P}{\rho v_0^2}, \quad \bar{u}_x = \frac{u_x}{R}, \quad \bar{u}_r = \frac{u_r}{R}$$

$$\bar{x} = \frac{x}{R}, \quad \tau = \frac{\nu \text{Re}}{R^2} t,$$

v_0 – характерная скорость течения, Re – число Рейнольдса.

Граничные условия формируются в виде

$$\bar{u}_x(\tau, \bar{x}) \Big|_{x=0} = \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{x}} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^3 \bar{u}_r}{\partial \bar{x}^3} \Big|_{x=0} = 0,$$

$$\bar{p}(\tau, \bar{x}) \Big|_{x=0} = f(\tau), \quad (15)$$

$$\bar{u}_x(\tau, \bar{x}) = \bar{u}_r(\tau, \bar{x}) = \bar{p}(\tau, \bar{x}) = \bar{v}_x(\tau, \bar{x}) \rightarrow 0, \quad \text{при } |\bar{x}| \rightarrow \infty.$$

Начальные условия принимаются нулевые

$$\bar{v}(\tau, \bar{x}) \Big|_{\tau=0} = \bar{p}(\tau, \bar{x}) \Big|_{\tau=0} = 0, \quad (16)$$

$$\bar{u}_x(\tau, \bar{x}) \Big|_{\tau=0} = \bar{u}_r(\tau, \bar{x}) \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0.$$

Начально-краевая задача (10) – (16) решается методом преобразования Лапласа по времени τ . После некоторых преобразований для давления p^L может быть получено следующее разрешающее уравнение:

$$n_1 \frac{d^8 p^L}{d\bar{x}^8} + n_2 \frac{d^6 p^L}{d\bar{x}^6} + n_3 \frac{d^4 p^L}{d\bar{x}^4} + n_4 \frac{d^2 p^L}{d\bar{x}^2} + n_5 p^L = 0. \quad (17)$$

Здесь

$$p^L(s, x) = \int_0^{\infty} \bar{p}(\tau, x) e^{-s\tau} d\tau,$$

s – параметр преобразования Лапласа,

$$n_1 = (1 + 2sA)^2 \frac{h^2}{24R^2} a + su^2 (1 + 2sA) \frac{h^2}{24R^2} \cdot \frac{\text{Re}}{s \text{Re} - 8},$$

$$n_2 = -(1 + 2sA)^2 \frac{h^2}{12R^2} \cdot \frac{\text{Re}}{2s(s \text{Re} - 8)},$$

$$\begin{aligned}
n_3 &= (v_0 + sB)^2 \frac{\text{Re}}{2s(s\text{Re} - 8)} - s^2 u^2 (1 + 2sA) \frac{ah^2}{24R^2} - \\
&\quad - (1 + 2sA) \times (a + s^2 u^2) \frac{\text{Re}}{2s(s\text{Re} - 8)} \\
n_4 &= (1 + 2sA) \times (a + s^2 u^2) \frac{a}{2} - (v_0 + sB)^2 \frac{a}{2} + su^2 (a + s^2 u^2) \frac{\text{Re}}{2(s\text{Re} - 8)} + \\
&\quad + 4R_0 \frac{v_0 + sB}{s\text{Re} - 8} + k_0 (1 + 2sA), \\
n_5 &= s^2 u^2 (1 + 2sA + s^2 u^2) \frac{a}{2} + k_0 s^2 u^2.
\end{aligned}$$

Учитывая условия убывания при $|\bar{x}| \rightarrow \infty$, решение уравнения (17) запишем в виде:

$$p^L(s, \bar{x}) = e^{-k_1 \bar{x}} (A_1 \cos k_2 \bar{x} + A_2 \sin k_2 \bar{x}) + e^{-k_3 \bar{x}} (A_3 \cos k_4 \bar{x} + A_4 \sin k_4 \bar{x}), \quad (18)$$

где $k_i (i=1,2,3,4)$ – корни характеристического уравнения, соответствующие дифференциальному уравнению (17). Скорости и перемещения определяются аналогично.

Подставляя решения в граничные условия (15), получаем систему уравнений для определения коэффициентов A_1, A_2, A_3, A_4

$$\begin{aligned}
A_1 + A_3 &= f^L(s), \quad \left(\frac{a}{2} k_1 - \frac{\text{Re}}{2s(s\text{Re} - 8)} (k_1^3 - 3k_1 k_2^2) \right) A_1 + \\
&+ \left(-\frac{a}{2} k_2 - \frac{\text{Re}}{2s(\text{Re} - 8)} (k_2^3 - 3k_1^2 k_2) \right) A_2 + \\
&+ \left(\frac{a}{2} k_3 - \frac{\text{Re}}{2s(s\text{Re} - 8)} (k_3^3 - 3k_3 k_4^2) \right) A_3 + \\
&+ \left(\frac{a}{2} k_4 - \frac{\text{Re}}{2s(s\text{Re} - 8)} (k_4^3 - 3k_3^2 k_4) \right) A_4 = 0, \\
\left(-\frac{a}{2} + \frac{\text{Re}(k_1^2 - k_2^2)}{2s(s\text{Re} - 8)} \right) A_1 - 2k_1 k_2 A_2 &+ \left(-\frac{a}{2} + \frac{\text{Re}(k_2^2 - k_4^2)}{2s(s\text{Re} - 8)} \right) A_3 - 2k_3 k_4 A_4 = 0 \quad (19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a}{2} (k_1^3 - 3k_1 k_2^2) - \frac{\text{Re}}{2s(s\text{Re} - 8)} (k_1^5 + 5k_1 k_2^4 - 10k_1^3 k_2^2) \right) A_1 + \\ & + \left(\frac{a}{2} (k_2^3 - 3k_1^2 k_2) - \frac{\text{Re}}{2s(s\text{Re} - 8)} (-k_2^5 + 10k_1^2 k_2^3 - 5k_1^4 k_2) \right) A_2 + \\ & + \left(\frac{a}{2} (k_3^3 - 3k_3 k_4^2) - \frac{\text{Re}}{2s(s\text{Re} - 8)} (k_3^5 + 5k_3 k_4^4 - 10k_3^3 k_4^2) \right) A_3 + \\ & \left(\frac{a}{2} (k_4^3 - 3k_3^2 k_4) - \frac{\text{Re}}{2s(s\text{Re} - 8)} (-k_4^5 + 10k_3^2 k_4^3 - 5k_3^4 k_4) \right) A_4 = 0. \end{aligned}$$

В дальнейшем численные решения были получены для импульса, соответствующего реальному изменению пульсового давления сердца

$$\bar{p}(\bar{x}\tau) \Big|_{x=0} = \bar{A} \tau^2 e^{-\alpha\tau}, \quad (20)$$

где $\bar{A} = 2,432 \cdot 10^{-4}$, $\alpha = 0,018$.

Численное обращение преобразования Лапласа применялось на основе рядов Фурье по синусам [15-17] при следующих параметрах:

$$u = 0,02191, \text{Re} = 2340, A = 4,073, B = 5,431, k_0 = 0,6,$$

$$a = 0,2178 \cdot 10^{-4}, k = 81459$$

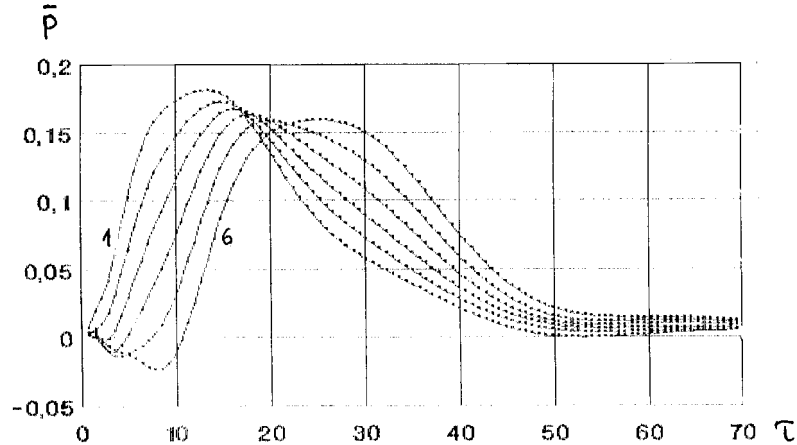


Рис. 1

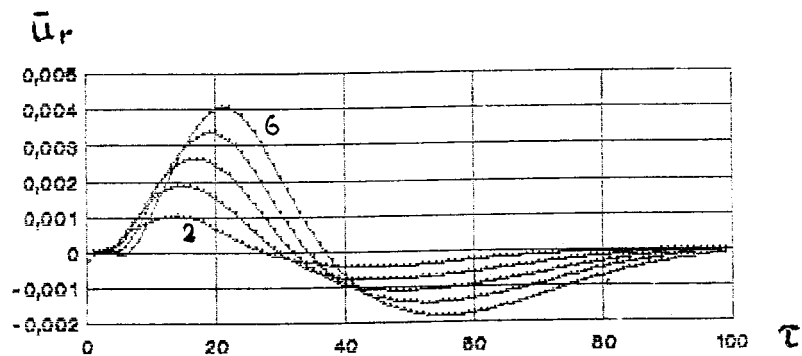


Рис. 2

Некоторые результаты расчетов представлены на Рис. 1, 2, которые показывают изменение давления $\bar{p} = p/\rho v_0^2$ и радиального перемещения $\bar{u}_r = u_r/R$ со временем τ в различных поперечных сечениях: $\bar{x} = 0$ (положение приложенного сосредоточенного импульса давления), 10, 20, 30, 40, 50. Эти поперечные сечения обозначены символами 1, 2, 3, 4, 5, 6. Относительная толщина $\bar{h} = h/R$ равна 0,02. Приведенные результаты демонстрируют неустановившиеся волновые движения вдоль кровеносного сосуда. Из рис. 1 видно, что максимальные величины импульса давления по мере распространения вдоль оболочки не возрастают, а в дальнейшем, как следует из расчетов, убывают. В то же время максимальные величины прогибов по мере распространения вдоль оболочки возрастают в рассматриваемом интервале, а при дальнейшем распространении, как показывают расчеты, эти величины убывают. Необходимо отметить, что эти результаты находятся в естественном соответствии с данными наблюдений [18, 19].

Список использованной литературы

1. Капо К., Педли Т., Шротер Р., Сид У. Механика кровообращения. М., 1981. 624с.
2. Liepsch D. Flow in tubes and arteries – a comparison // Biorheology. 1986, № 23. – P. 395-433.
3. Pallotti G., Coli L., Pettazzoni P., Stefoni S., Stagni B., Cianciolo G., Buscaroli A., Raimondi C., Bonomini V. Renal arterial stenosis in renal transplantation: a mathematical pathogenetic hypothesis and its possible implications // Proc. 2nd Int Symp. Mechanics and Biorheology. 1989. P. 443-445.
4. Affeld K., Gadischke J. Shear rate and thrombin transport // Biofluid Mechanics. Ed. by Liepsch. 1994. № 107. P.35-40.
5. Corsini F., Pallotti G., Posteli T. Mechanical biocompatibility in transplantation // International Journal of Artificial Organs. 1984 № 7. P. 167-171.
6. Селезов И. Т., Каплун Ю. М. Влияние сужения кровеносного сосуда на распространение пульсового давления крови // Био-

ника. 1991. № 24. С. 50-54. 7. *Selezov I. T.* Some problems of the wave propagation in blood vessels // Int. Colloquium EUROMECH 311 "Blood-Wall Interaction". Berlin, Germany. 1993. October 17-21. 8. *De Sanctis L. B., Coli L., Cianciolo G., et al.* A mathematical hypothesis for arterial stenosis in renal transplantation // *Biofluid Mechanics*. 1994. № 107 P. 421-427. 9. *Selezov I. T., Pallotti G., Avramenko O. V.* Predominant danger of bending stresses in a joint artificial and host blood vessels // 22nd Congress of European Society for Artificial Organs. Berlin, Germany. 1995. October 19-21 // *Int. J. of Artificial Organs*. 1995. № 8. P. 439. 10. *Selezov I. T., Pallotti G., Avramenko O. V., Bonomini V.* Mathematical modeling of heart pulse propagation in the presence of joint of different vessels // Int. Colloquium EUROMECH 344 "Fluid-Structure Interactions in Biomechanics". London, UK. 1996. April 10-13. 11. *Selezov I. T., Pallotti G., Avramenko O. V., Fratamico G., Coli L.* Wave propagation in vessel with a joint due to transient and pulsatile excitation // *Proc. 9th Int. Conf., Mechanics in Medicine and Biology*. Ljubljana, Slovenia. 1996. P. 361-364. 12. *Ben-Menahem A., Singh S. J.* Seismic waves and sources. Springer-Verlag. 1981. 13. *Moodie E. B., Barday D. W., Tait R. T.* A boundary value problem for fluid-filled viscoelastic tubes // *Mathematical Model*. 1983 № 4 P. 195-207. 14. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М., 1967. 984 с. 15. *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М. 1965. 288 с. 16. *Селезов И. Т.* Моделирование волновых и дифракционных процессов в сплошных средах. Киев, 1989. 204 с. 17. *Selezov I. T.* Numerical Laplace transform inversion for solving initial boundary value problems of mechanics // *The 3rd Int. Congress on Industrial and Appl. Math.* Hamburg, Germany. 3-7 July 1995. P. 435. 18. *Педли Т.* Гидромеханика крупных кровеносных сосудов. М. 1983. 400 с. 19. *Физиология кровообращения. Регуляция кровообращения (Руководство по физиологии)*. Л. 1986. 640 с.

Поступила в редколлегию 3.07.97