УДК 539.3

В. А. ГЕРАСИК, асп., В. Н. ТИЩЕНКО, канд. физ.-мат. наук,
Ю. А. ШЕВЛЯКОВ, д.т.н., проф.,
Симфероп. гос. ун-т

ДВИЖЕНИЕ СИЛОВОГО ИСТОЧНИКА ПО УПРУГОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Рассматривается задача о движении сосредоточенной силы переменной величины $P(t)$ по свободной поверхности упругого полупространства с целью изучения волновых процессов в упругой среде. Особое внимание уделено определению поверхностных волновых фронтов, фиксация которых по данным сейсмограмм позволяет локализовать положение источника в пространстве и времени. Подобная плоская задача рассматривалась, например [1], однако аналитические решения задачи движения стационарного источника с постоянной скоростью получены только при $t \to \infty$ без изучения переходного процесса распространения волн.

Пусть на поверхности $z = 0$ упругого полупространства $z \geq 0$ движется силовой источник мощности $P(t)$ по закону $x = x_0(t)$, $y = y_0(t)$. Граничные условия задачи имеют вид $(z = 0)$:

$$\begin{aligned} &\sigma_{zx}(x,y,t) = \sigma_{zy}(x,y,t) = 0, \\ &\sigma_{zz}(x,y,t) = -P(t)\delta(x - x_0(t))\delta(y - y_0(t)). \end{aligned} \tag{1}$$

Пусть на поверхности $z = 0$ упругого полупространства $z \geq 0$ движется силовой источник мощности $P(t)$ по закону $x = x_0(t)$, $y = y_0(t)$. Граничные условия задачи имеют вид $(z = 0)$:

$$\begin{aligned} &\sigma_{zx}(x,y,t) = \sigma_{zy}(x,y,t) = 0, \\ &\sigma_{zz}(x,y,t) = -P(t)\delta(x - x_0(t))\delta(y - y_0(t)). \end{aligned} \tag{1}$$

Мощность источника можно представить в виде:

$$P(t) = \int_0^t P(\tau)\delta(t-\tau)d\tau,$$

где $\delta(t)$ – функция Дирака, так что:

$$\sigma_{zz}(x,y,t) = -\int_0^t P(\tau)\delta(x - x_0(\tau))\delta(y - y_0(\tau))\delta(t-\tau)\,d\tau. \tag{2}$$

Учитывая линейность и инвариантность задачи к преобразованию сдвига $x' = x - x_0(\tau)$, $y' = y - y_0(\tau)$, $t' = t - \tau$, можно решать задачу об импульсе в начальный момент времени в начале координат:

$$\sigma_{zx}(x', y', t') = \sigma_{zy}(x', y', t') = 0,$$
$$\sigma_{zz}(x', y', t') = -P\delta(x')\delta(y')\delta(t'), \qquad (3)$$

чтобы затем, вернувшись к основным переменным и проинтегрировав полученное решение вместе с амплитудным множителем $P(\tau)$ по τ от 0 до t, получить решение исходной задачи (1). Очевидно, что решение задачи (3) аналогично известной задаче Лэмба [1].

Введем потенциалы $\phi(r, z, t')$ и $\psi(r, z, t')$, удовлетворяющие волновым уравнениям:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right)\phi = 0, \qquad \left(\nabla^2 - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right)\psi = 0,$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \qquad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \qquad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho},$$

λ, μ – упругие постоянные, ρ – плотность среды.

Компоненты вектора перемещения u_r, u_z определим формулами:

$$u_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z\,\partial r}, \qquad u_z = \frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t'^2}.$$

Если искать потенциалы ϕ и ψ в виде интегралов Фурье-Бесселя:

$$\phi(r, z, t') = \mathrm{Re}\int_0^\infty\int_0^\infty A e^{-\nu_1 z} a J_0(ar)\cos\omega t'\,da\,d\omega,$$

$$\psi(r, z, t') = \mathrm{Re}\int_0^\infty\int_0^\infty B e^{-\nu_2 z} a J_0(ar)\cos\omega t'\,da\,d\omega,$$

тогда [1]:

$$u_r(r, z, t') = \mathrm{Re}\int_0^\infty\int_0^\infty \left(\nu_2 a B e^{-\nu_2 z} - a A e^{-\nu_1 z}\right) a J_1(ar)\cos\omega t'\,da\,d\omega,$$

$$u_z(r, z, t') = \mathrm{Re}\int_0^\infty\int_0^\infty \left(a^2 B e^{-\nu_2 z} - \nu_1 A e^{-\nu_1 z}\right) a J_0(ar)\cos\omega t'\,da\,d\omega,$$

где

$$A = \frac{P}{\pi^2}\frac{\left(2a^2 - k_2^2\right)}{\mu N(a\omega)}, \qquad B = \frac{P}{\pi^2}\frac{2\nu_1}{\mu N(a\omega)},$$

$$\nu_{1,2} = \sqrt{a^2 - k_{1,2}^2}, \quad k_{1,2} = \omega / c_{1,2},$$

$N(a, \omega) = \left(2a^2 - k_2^2\right)^2 - 4a^2\nu_1\nu_2$ – соотношение Релея в задаче Лэмба.

В полученных интегралах производится замена переменных $k=\left(c_2 a/\omega\right)^2$, после чего становится допустимо аналитическое интегрирование по ω. Выделяя действительную часть, можно перейти к однократным интегралам в смысле Римана или Коши, что дает возможность использовать методы численного интегрирования.

Решение для вертикальных смещений u_z на поверхности $z=0$ может быть получено аналитически:

$$
\begin{aligned}
u_r(r,0,t') &= \frac{P}{\pi^2\mu}\operatorname{Re}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\nu_2 k_2^2}{N(a,\omega)}\, a J_0(ar)\cos\omega t'\, da\, d\omega = \\
&= \frac{P}{\pi^2\mu}\frac{\partial}{\partial t'}\operatorname{Re}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\nu_2 k_2^2}{\omega N(a,\omega)}\, a J_0(ar)\sin\omega t'\, da\, d\omega = \\
&= \frac{P}{\pi^2\mu r}\frac{\partial}{\partial t'}\operatorname{Re}\int_0^p \frac{\alpha\, dk}{N_1(k)\sqrt{p-k}}\,,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где $\gamma=c_2/c_1<1$, $\alpha=\sqrt{k-\gamma^2}$, $\beta=\sqrt{k-1}$, $p=c_2^2 t'^2/r^2$, $N_1(k)=(2k-1)^2-4k\alpha\beta$.

На первом этапе вычисляется интеграл по времени от этого выражения, который представляет собой решение задачи о включении постоянной сосредоточенной силы в начале координат:

$$
u_z=\frac{P}{\pi\mu r}f(p), \tag{5}
$$

где

$$
f(p)=\begin{cases}
0, & p\le\gamma^2;\\
-\dfrac{1}{8\left(1-\gamma^2\right)}-\dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{2} m_i\sqrt{\frac{\gamma^2-k_i}{p-k_i}}+m_3\sqrt{\frac{k_3-\gamma^2}{k_3-p}}\right), & \gamma^2\le p\le 1;\\
-\dfrac{1}{4\left(1-\gamma^2\right)}-m_3\sqrt{\dfrac{k_3-\gamma^2}{k_3-p}}, & 1\le p\le k_3;\\
-\dfrac{1}{4\left(1-\gamma^2\right)}, & p\ge k_3.
\end{cases}
$$

где $R(k)=N_1(k)N_2(k)$ – полином 3-й степени, $N_2(k)=(2k-1)^2+4k\alpha\beta$, $R(k_i)=0$, $\operatorname{Im}k_3=0$, $\operatorname{Re}k_3>1$, $m_i=(2k_i-1)^2/R'(k_i)$ $(i=1,2,3)$, $c_R=c_2/\sqrt{k_3}$ – скорость распространения волны Релея.

В этом выражении смещения выделяются три фронта, которые являются окружностями переменных радиусов c_1t', c_2t', c_Rt', так что на фронтах $r = c_1t'$ и $r = c_2t'$ перемещение непрерывно, а на фронте Р е-лея $r = c_Rt'$ имеется бесконечный разрыв. В круге $r \le c_Rt'$ полученное выражение совпадает с решением статической задачи Буссинеска для полупространства, т.е. переходные процессы происходят только в кольце $c_Rt' \le r \le c_1t'$. Заметим, что аналогично (4), но иным способом, приведены выражения для постоянной силы в [2], но без выделения волновых фронтов.

Решение задачи (3) имеет вид:

$$u_z = \frac{P}{\pi\mu r} f'(p) \frac{dp}{dt'}, \tag{6}$$

$$f'(p) = \begin{cases} 0, & p < \gamma^2; \\ \dfrac{1}{2}\left(\sum\limits_{i=1}^{2} m_i \sqrt{\dfrac{\gamma^2 - k_i}{(p-k_i)^3}} + m_3 \sqrt{\dfrac{k_3 - \gamma^2}{(k_3 - p)^3}} \right), & \gamma^2 \le p < 1; \\ -m_3 \sqrt{\dfrac{k_3 - \gamma^2}{(k_3 - p)^3}}, & 1 \le p < k_3; \\ m_3 \sqrt{\dfrac{k_3 - \gamma^2}{p - k_3}}\, \delta(p - k_3), & p > k_3. \end{cases}$$

Области существования волн остаются такими же, как и в предыдущем случае, но появляются скачки при переходах через фронты c_1t' и c_2t'.

Перемещение $u_z(x,y,0,t)$ от движущейся с постоянной скоростью v стационарной силы вдоль оси X следует получать интегрированием решения (6):

$$u_z(x,y,0,t) = \int_0^t u_z(x - v\tau, y, t-\tau)\,d\tau = \frac{2P}{\pi\mu} \int_{p(\tau=0)}^{p(\tau=t)} f'(p) \frac{t-\tau}{r^3(\tau)} \frac{d\tau}{dp} dp,$$

где

$$p = c_2^2 (t-\tau)^2 / r^2(\tau), \quad r(\tau) = \sqrt{(x - v\tau)^2 + y^2},$$

$$\frac{d\tau}{dp} = \frac{r^3(\tau)\operatorname{sgn}\left[\left(pv^2 - c_2^2\right)\tau(p) - \left(pxv - c_2^2 t\right)\right]}{2(t-\tau)\sqrt{b - ap}}$$

$$b = (x - vt)^2 + y^2, \; a = (v/c_2)^2 y^2, \; p(\tau = 0) = \omega = \frac{c_2^2 t^2}{x^2 + y^2}, \; p(\tau = t) = 0.$$

Окончательно,

$$u_z = -\frac{P}{\pi\mu}\int_0^{\omega}\frac{f(p)}{\sqrt{b-ap}}\operatorname{sgn}(\tau'(p))dp. \tag{7}$$

При контурном интегрировании важно учесть точки p^*, $\tau^* = \tau(p^*)$ смены знака производной $\tau'(p)$ в подынтегральной функции, которые имеют следующие значения:

$$p^* = b/a = c_2^2\frac{(x-vt)^2+y^2}{y^2v^2},\ \tau^* = \frac{x^2+y^2-xvt}{v(x-vt)},\ \left(\tau^* - t = \frac{(x-vt)^2+y^2}{v(x-vt)}\right),$$

так что при условии $0 \le \tau^* \le t$ интегрирование необходимо проводить по интервалам $(0, p^*)$, (ω, p^*), т.е.

$$u_z = \frac{P}{\pi\mu}\int_0^{p^*}\frac{f(p)}{\sqrt{b-ap}}dp - \frac{P}{\pi\mu}\int_{p^*}^{\omega}\frac{f(p)}{\sqrt{b-ap}}dp = \frac{P}{\pi\mu}\int_{\gamma^2}^{\omega}\frac{f(p)}{\sqrt{b-ap}}dp + \frac{P}{\pi\mu}\int_{\omega}^{p^*}\frac{f(p)}{\sqrt{b-ap}}dp \tag{8}$$

Рассмотрим свойства слагаемых искомого смещения, которые определяют физическую и количественную сущность развития процесса.

Первый интеграл определен в круге $r \le c_1 t$ $(\omega \ge \gamma^2)$ и в кольце $c_R t \le r \le c_1 t$ дает функцию $u_z(x,y,t)$, не стационарную относительно движущейся точки $x = vt$. Однако при $0 < r \le c_R t$ $(\omega \ge k_3)$ интеграл имеет постоянные пределы (γ^2, k_3) ввиду того, что $f(p) = 0$ при $p > k_3$, что позволяет говорить о стационарном решении $u_z(x - vt, y)$ в круге, расходящимся со скоростью волн Рэлея.

Второй интеграл отличен от нуля в области $x - vt \le 0$ $(\tau^* \le t)$, $\left(x - \frac{1}{2}vt\right)^2 + y^2 \le 1/4v^2t^2$ $(\tau^* \ge 0)$, в "конусе" $p^* \ge \gamma^2$ и вне круга $r \ge c_R t$ $(\omega \le k_3)$, причем для $r \ge c_1 t$ $(\omega \le \gamma^2)$ решение становится стационарным, (так как пределы интегрирования и подынтегральная функция становятся стационарными), т.е. $u_z(x - vt, y)$. Таким образом, выделяются две области установившегося движения – $0 < r \le c_R t$ для любых v и, в случае $v > c_1$, – $r \ge c_1 t$, $p^* \ge \gamma^2$.

Решение (8) может быть представлено в виде:

$$u_z = \frac{P}{\pi\mu}\int_{\gamma^2}^{\omega}\frac{f(p)}{\sqrt{b-ap}}dp + \frac{P}{\pi\mu}\int_{\omega}^{p^*}\frac{f(p)}{\sqrt{b-ap}}dp = \frac{P}{\pi\mu}\left(2F(p^*) - F(\gamma^2) - F(\omega)\right), \tag{9}$$

где выражение для первообразной $F(p)=\int_0^{\omega}\frac{f(p)}{\sqrt{b-ap}}dp$:

$$F(p)=\begin{cases} 0, & p<\gamma^2;\\ \sum_{i=1}^{2}\frac{m_i\sqrt{b-ap}}{ak_i-b}\sqrt{\frac{\gamma^2-k_i}{p-k_i}}+\frac{m_3\sqrt{b-ap}}{ak_3-b}\sqrt{\frac{k_3-\gamma^2}{k_3-p}}, & \gamma^2\le p<1;\\ \frac{2m_3\sqrt{b-ap}}{ak_3-b}\sqrt{\frac{k_3-\gamma^2}{k_3-p}}, & 1\le p<k_3;\\ 0, & p\ge k_3. \end{cases}$$

Анализ общего решения вида (9) позволяет сделать следующие выв о-ды:

– смещения неограниченно растут на образующих конуса Релея $p^*=k_3$ и на окружности $\omega=k_3$, расходящейся со скоростью волны Релея;
– решение для поверхностных смещений в области $0<r<c_R t$ $(\omega>k_3)$ имеет вид:

$$u_z=-F(\gamma^2)=-\frac{P}{\pi\mu}\left(\sum_{i=1}^{2}\frac{m_i\sqrt{b-a\gamma^2}}{ak_i-b}+\frac{m_3\sqrt{b-a\gamma^2}}{ak_3-b}\right), \tag{10}$$

откуда предельным переходом $v\to 0$ можно получить решение зад а-чи Буссинеска для полупространства;

– решение в случае $v>c_1$ для области $\omega<\gamma^2$, $p^*>\gamma^2$ равно:

$$u_z=-2F(\gamma^2), \tag{11}$$

а это означает, что величина смещений в этом "конусе" при $v\neq 0$ вдвое превышает те же смещения в задаче Буссинеска относительно источника, что указывает на существенные различия в физических я в-лениях неподвижного и движущегося источн ика.

Список использованной литературы

1. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с. 2. *Поручиков В. Б.* Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328с.

Поступила в редколлегию 17.12.97