УДК 517.929

О.В. АНАШКИН, канд. физ.-мат. наук доц. Симферопольский ун-т

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ МАЛЫЙ ПАРАМЕТР

Представлены новые результаты об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа с малым параметром μ. Предполагается, что правая часть рассматриваемой системы удовлетворяет условиям существования решения начальной задачи типа условий Каратеодори и является интегрально непрерывной по параметру μ в точке $\mu = 0$. Это дает возможность применять полученные результаты для исследования функционально-дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами. Введено понятие μ-устойчивости, в терминах функционалов типа Ляпунова формулируются достаточные условия μ-устойчивости.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему функционально-дифференциальных уравнений с малым параметром μ вида

$$\dot{x}(t) = F(t, x_t, \mu), \tag{1.1}$$

где функционал $F\colon G_H^h \to \boldsymbol{R}^n$ определен в области $G_H^h = \boldsymbol{R}_+ \times \Omega_H^h \times \mathbf{M}$, $\boldsymbol{R}_+ = [0, \infty)$, $\Omega_H^h = \{\varphi \in C_h \colon \|\varphi\| < H\}$ - открытый шар в пространстве C_h непрерывных на отрезке $[-h, 0]$ вектор-функций с нормой $\|\varphi\| = \max\{|\varphi(s)| : -h \le s \le 0\}$, $|\cdot|$ - некоторая норма в $\boldsymbol{R}^n$, $\mathbf{M} = [0,1]$. Для данной непрерывной функции $x(t)$ мы обозначим через x_t элемент пространства C_h, определенный как $x_t(s) = x(t+s)$, $-h \le s \le 0$.

Обозначим через $\mathcal{K}$ множество всех строго возрастающих непрерывных функций $a\colon \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}_+$, $a(0) = 0$. Функцию $L\colon \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}_+$ назовем равномерно локально суммируемой, если найдется константа $l > 0$ такая, что $\int_{t_1}^{t_2} L(t)dt \le l(t_2 - t_1)$ для любого конечного отрезка $[t_1, t_2] \subset \boldsymbol{R}_+$. Множество всех таких функций обозначим через $\mathcal{UI}(\boldsymbol{R}_+)$.

Будем предполагать, что правая часть F уравнения (1.1) при каждом фиксированном $\mu \in \mathbf{M}$ удовлетворяет условиям типа Каратеодори [1,2], а именно, функционал $F(t,\varphi,\mu)$ измерим по t для каждого $\varphi \in \Omega_H^h$ и существует функция $e \in \mathcal{K}$ и функции $M, L \in \mathcal{UI}(\boldsymbol{R}_+)$ такие, что

$$F(t,\varphi,\mu) \le M(t),\ \left|F(t,\varphi,\mu) - F(t,\psi,\mu)\right| \le L(t)e(r) \tag{1.2}$$

для любого $r > 0$ при $\|\varphi - \psi\| < r$, $\mu \in \mathbf{M}$. Эти условия обеспечивают существование абсолютно непрерывного решения

$$x\colon \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}^n,\ t \mapsto x(t; t_0, \varphi_0, \mu),$$

удовлетворяющего уравнению (1.1) почти всюду в некотором интервале $[t_0, t_0 + a]$, $a = a(t_0, \varphi_0, \mu) > 0$, для произвольных начальных данных $(t_0, \varphi_0) \in \boldsymbol{R}_+ \times \Omega_H^h$ и $\mu \in \mathbf{M}$.

Наряду с возмущенной системой (1.1) рассмотрим невозмущенную систему

$$\dot{x}(t) = F(t, x_t, 0). \tag{1.3}$$

Предполагается, что задача Коши для невозмущенной системы однозначно разрешима в области $\boldsymbol{R}_+ \times \Omega_H^h$.
Относительно зависимости функционала F от параметра μ мы будем предполагать, что функционал равномерно интегрально непрерывен по μ в точке $\mu = 0$.

Определение 1.1. Функционал $F(t,\varphi,\mu)$ называется равномерно интегрально непрерывным относительно μ в точке $\mu = 0$, если для каждого $T > 0$ существует функция $g_T \in \mathcal{K}$ такая, что для любых $t \ge 0$, $\varphi \in \Omega_H^h$ и $\mu \in \mathbf{M}$

$$\left|\int_t^{t+T} \left[F(s,\varphi,\mu) - F(s,\varphi,0)\right] ds\right| \le g_T(\mu).$$

Равномерная интегральная непрерывность по параметру гарантирует равномерную сходимость решения $x(t,\varphi,\mu)$, уравнения (1.1) к решению $x(t,\varphi,0)$ невозмущенной системы (1.3) при $\mu \to 0$ на отрезке $[t, t+a]$ для любых $t \ge 0$ и $\varphi \in \Omega_H^h$ $(H' < H)$. Автору настоящей статьи не удалось обнаружить в доступной ему литературе подходящее утверждение и поэтому здесь приводится формулировка необходимой теоремы о непрерывной зависимости от параметров. Отметим, что теорема формулируется для несколько более общего класса уравнений вида (1.1).

Теорема 1.1. Пусть $\mathbf{M}$ - подмножество некоторого метрического пространства с метрикой $\rho(\mu', \mu'')$ и μ_0 его предельная точка. Пусть для

$\mu \in \mathbf{M}$, $t \ge 0$, $\varphi \in \Omega_H^h$ и некоторого $T > 0$ функционал $F(t,\varphi,\mu)$ измерим по t при фиксированных φ и μ, удовлетворяет неравенствам (1.2) и существует функция $g_T \in \mathcal{K}$ такая, что для каждого $\varphi \in \Omega_H^h$ равномерно по $\delta \in [0,T]$ и $t \ge 0$

$$\left| \int_t^{t+\delta} \left[F(s,\varphi,\mu) - F(s,\varphi,\mu_0) \right] ds \right| \le g_T(\rho(\mu,\mu_0)).$$

Пусть, кроме того, для некоторого H', $0 < H' < H$, решение $x(\sigma,\varphi,\mu_0)$, задачи Коши для уравнения (1.1) при $\mu = \mu_0$ и $\varphi \in \Omega_H^h \subset \Omega_H^h$ единственно и $x_t(\sigma,\varphi,\mu_0) \in \Omega_H^h$ при $\sigma \le t \le \sigma + T$ для любого $\sigma \ge 0$.

Тогда при всяком $\sigma \ge 0$, $\varphi \in \Omega_{H'}^h$ и при любом μ, достаточно близком к μ_0, решение $x(\sigma,\varphi,\mu)$ уравнения (1.1) определено на отрезке $[\sigma,\sigma+T]$ и сходится при $\mu \to \mu_0$ к решению невозмущенной системы $x(\sigma,\varphi,\mu_0)$ равномерно по $\sigma \ge 0$ и $\varphi \in \Omega_{H'}^h$.

Доказательство проводится по известной схеме по аналогии с подходом, применявшимся в теории обыкновенных дифференциальных уравнений Каратеодори [2]. Равномерность по σ и φ обеспечивает свойство компактности множества решений функционально-дифференциального уравнения (1.1).

Уточним понятие устойчивости, используемое в этой статье.

О п р е д е л е н и е 1.2. Система (1.1) называется μ-устойчивой (относительно $x = 0$), если для каждого $\sigma \ge 0$ и $\alpha > 0$ существуют $\beta = \beta(\alpha,\sigma) > 0$ и $\mu_0 = \mu_0(\alpha,\sigma) > 0$ такие, что для любых $\varphi \in \Omega_H^h$ и $\mu \in [0,\mu_0]$ $x_t(\sigma,\varphi,\mu) \in \Omega_\alpha^h$ при $t \ge \sigma$;

равномерно μ-устойчивой (относительно $x = 0$), если она μ-устойчива и β,μ_0 не зависят от σ;

μ-притягивающей (относительно $x = 0$), если для каждого $\sigma \ge 0$ найдется $\beta = \beta(\sigma) > 0$ такое, что для любых $\alpha > 0$ и $\varphi \in \Omega_\beta^h$ существует $\mu_0 = \mu_0(\sigma,\alpha,\varphi) > 0$ такое, что для всякого $\mu \in [0,\mu_0]$ найдется $\chi = \chi(\sigma,\alpha,\varphi,\mu) > 0$ такое, что $x_t(\sigma,\varphi,\mu) \in \Omega_\alpha^h$ при $t \ge \sigma + \chi$;

равномерно μ-притягивающей (относительно $x = 0$), если в определении μ-притяжения величина β не зависит от σ, а величина μ_0 и χ - от σ,φ;

асимптотически μ-устойчивой (относительно $x=0$), если она μ-устойчивая и μ-притягивающая (относительно $x=0$);

равномерно асимптотически μ-устойчивой (относительно $x=0$), если она равномерно μ-устойчивая и равномерно μ-притягивающая (относительно $x=0$).

Понятие μ-устойчивости было введено для обыкновенных дифференциальных уравнений [3,4]. Более общее понятие частичной μ-устойчивости обсуждается в работах [5,6]. Если начальная функция φ_0 μ-устойчивой системы (1.1) взята достаточно близко к началу в C_h, то все траектории $x(t;t_0,\varphi_0,\mu)$ системы остаются в малой окрестности начала в $\boldsymbol{R}^n$ при всех достаточно малых μ. Свойство μ-устойчивости особенно информативно, когда система (1.1) не имеет нулевого решения. Если же нулевое решение имеется, то характер устойчивости этого решения по Ляпунову и характер μ-устойчивости системы, вообще говоря, никак между собой не связаны.

Следующее понятие играет ключевую роль в нашем подходе. Для данных $h_0 \geq h$ и $R \geq 1$ рассмотрим множество

$$\mathscr{A}_R^{h_0} = \left\{\varphi \in C_{h_0} : \|\varphi\| \leq R|\varphi(0)|\right\}.$$

Нетрудно убедиться, что множество $\mathscr{A}_R^{h_0}$ является невыпуклым конусом в C_{h_0}, множество $\mathscr{A}_1^{h_0}$ не имеет внутренних точек и $\mathscr{A}_{R1}^{h_0} \subset \mathscr{A}_{R2}^{h_0}$ для любых $1 \leq R_1 \leq R_2$. Значение конуса с точки зрения теории устойчивости определяется тем фактором, что $\|x_t(\sigma,\varphi,\mu)\|$ может возрастать только тогда, когда $x_t \in \mathscr{A}_1^{h_0}$ и $|x(t,\sigma,\varphi,\mu)| \to 0$ пока $x_t(\sigma,\varphi,\mu)$ находится за пределами конуса $\mathscr{A}_R^{h_0}$ для некоторого $R>1$.

2. Достаточные условия μ-устойчивости. В этом разделе мы рассмотрим задачу об устойчивости системы (1.1) в контексте второго метода Ляпунова. Предположим, что невозмущенная система (1.3) является системой обыкновенных дифференциальных уравнений, $F(t,x_t,0) \equiv f(t,x(t))$, т.е. имеет вид

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t)). \tag{2.1}$$

Пусть эта система имеет неасимптотически устойчивое нулевое решение и v_0 есть соответствующая функция Ляпунова, т.е. она определенно положительна и имеет неположительную производную в силу уравнений системы (2.1).

Для исследования системы (1.1) мы будем использовать вспомогательный функционал $v: \boldsymbol{R}_+ \times \Omega_H^h \times \mathbf{M} \to \boldsymbol{R}$ такой, что $v(t,\varphi,\mu) \to v_0(t,\varphi(0))$ при $\mu \to 0$. Производную функционала v в силу системы (1.1) определим как

$$\dot{v}|_{(1.1)}(\sigma,\varphi,\mu) = \lim_{\Delta t \to +0} \frac{v(\sigma + \Delta t, x_{\sigma+\Delta t}(\sigma,\varphi,\mu),\mu) - v(\sigma,\varphi,\mu)}{\Delta t}.$$

Как и в работах [7,8] функционал $v(t,\varphi,\mu)$, гарантирующий асимптотическую μ- устойчивость системы (1.1), не должен быть знакопеременным во всем пространстве C_h, но лишь в конусе $\mathscr{A}_R^h$ для некоторого $R > 1$. Следующая лемма дает важную характеристику решений рассматриваемого класса уравнений и используется при доказательстве теорем о μ-устойчивости.

Лемма 2.1. Пусть для всякого $h_0 > 0$ существуют постоянные $\nu_1, \nu_2, 0 < \nu_1 \le \nu_2$, такие, что при $t_0 \le t \le t_0 + 2h_0$ решение невозмущенной системы (2.1) $x(t_0, x_0, 0)$ удовлетворяет неравенству

$$\nu_1 |x_0| \le |x(t; t_0, x_0, 0)| \le \nu_2 |x_0| \tag{2.2}$$

для любых $t_0 \ge 0$ и $x_0 \in B_H = \{x \in \boldsymbol{R}^n : |x| < H\}$. Тогда для любых $\alpha > 0$ и $R > \nu_2/\nu_1 \ge 1$ существует $\mu_0 > 0$ такое, что при любых μ, $0 < \mu < \mu_0$, $\sigma \ge 0$ и $\varphi \in \Omega_{H'}^{h_0}$ из $x_t(\sigma,\varphi,\mu) \in \mathscr{A}_R^{h_0}$ следует, что $x_t(\sigma,\varphi,\mu) \in \mathscr{A}_R^{h_0}$ при $t \ge t_0 + h_0$ по меньшей мере до тех пор, пока $x(t - h_0; \sigma,\varphi,\mu) > \alpha$.

Сочетая методику, развитую в работах [4] и [7] и учитывая утверждение леммы, можно получить следующий результат.

Теорема 2.1. Пусть невозмущенная система (2.1) такова, что для некоторого $h_0 \ge h$ и $R > \nu_1/\nu_2 \ge 1$ имеет место неравенство (2.2) и, кроме того, выполняются следующие условия:

1) существуют функционалы $v(t,\varphi,\mu)$, $\Phi(t,\varphi,\mu)$ и функции $a, b \in \mathscr{K}$ такие, что : а) $\dot{v}|_{(1.1)}(t,\varphi,\mu) \le \Phi(t,\varphi,\mu)$, б) $v(t,\varphi,\mu) \le b(\|\varphi\|)$ для $(t,\varphi,\mu) \in G_H^{h_0}$, в) $v(t,\varphi,\mu) \to v_0(t,\varphi(0))$ при $\mu \to 0$ равномерно по $t \ge 0$ и $\varphi \in \Omega_{H'}^{h_0}$ и $v_0(t,\varphi(0)) \ge a(|\varphi(0)|)$ при $t \ge 0$, $\varphi(0) \in B_H$;
2) функционал Φ допускает представление $\Phi(t,\varphi,\mu) = \theta(\mu)\Xi(t,\varphi,\mu)$, $\Xi(t,\varphi,\mu) \ne 0$, для некоторой функции $\theta \in \mathscr{K}$ и функционалы $\Phi(t,\varphi,\mu)$ и $\Xi(t,\varphi,\mu)$ равномерно интегрально непрерывны по μ в точке $\mu = 0$;

3) для любого $\alpha > 0$, существуют $T > 0$ и $\delta > 0$ такие, что для $t_0 \geq 0$, $x_0 \in B_H \setminus B_\alpha$ $\Delta t \geq T$

$$\mathscr{I}(\Delta t, t_0, x_0) = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \Xi(t, x_t(t_0, x_0, 0), 0) dt \leq 2\delta \Delta t .$$

Тогда система (1.1) равномерно асимптотически μ-устойчива.

Достаточные условия неустойчивости формулируются в виде теоремы типа Четаева.

Теорема 2.2. Пусть для некоторых $\sigma \geq 0$ и $\beta > 0$ выполнены требования:

1) для любого $h_0 > 0$ можно найти постоянные ν_1 и ν_2, $0 < \nu_1 \leq \nu_2$, такие, что решение $x(t_0, x_0, 0)$ невозмущенной системы (2.1) при $t_0 \leq t \leq t_0 + 2h_0$ удовлетворяет неравенству $\nu_1|x_0| \leq |x(t; t_0, x_0, 0)| \leq \nu_2 |x_0|$ равномерно по $t_0 \geq \sigma$ и $x_0 \in B_\beta$;

2) существует непрерывная функция $v_0 : [\sigma, \infty) \times B_\beta \to \boldsymbol{R}$ такая, что для любых $t \geq \sigma$ и η, $0 < \eta < \beta$, найдется точка $x_{\eta,t}$, $|x_{\eta,t}| = \eta$, такая, что $v_0(t, x_{\eta,t}) > 0$ причем в области $\{(t,x) : v_0(t,x) > 0\}$ функция v_0 ограничена сверху; 3) для некоторых $h_0 \geq h$ и $R > \nu_2/\nu_1 \geq 1$ существуют функционалы $v, \Phi : \mathscr{D} \times M \to \boldsymbol{R}$, где $\mathscr{D} = [\sigma, \infty) \times \left(\mathscr{A}_R^{h_0} \cap \Omega_\beta^{h_0}\right)$, также, что $\dot{v}|_{(1.1)} \geq \Phi(t, \varphi, \mu)$ и $v(t, \varphi, \mu) \to v_0(t, \varphi(0))$ при $\mu \to 0$ равномерно по $(t, \varphi) \in \mathscr{D}$; 4) функционал Φ удовлетворяет условию 2) теоремы 2.1 для $(t, \varphi) \in \mathscr{D}$ при достаточно малых значениях $\mu > 0$; 5) для любого $\alpha > 0$ существуют постоянные $T > 0$ и $\delta > 0$ такие, что при $\Delta t \geq T$

$$\mathscr{I}(\Delta t, t_0, x_0) \geq 2\delta \Delta t ,$$

если $v_0(t_0, x_0) \geq \alpha$.

Тогда система (1.1) μ-неустойчива.

3. Иллюстративный пример. Ограничимся здесь простейшим примером применения сформулированных теорем. Рассмотрим линейное уравнение с постоянным запаздыванием

$$\dot{x}(t) = \mu x(t-h) \cos t + C \sin \frac{t}{\mu} \tag{3.1}$$

где C - постоянная. Отметим, что это уравнение в данном случае тривиальное: $\dot{x}(t) \equiv 0$. Положим $v_0(x) = x^2/2$. Тогда $v_0|_{3.1} = \mu \Xi_0(t, x_t, \mu) = $ $= \mu x(t) x(t-h) \cos t + C x(t) \sin \frac{t}{\mu}$. Функционал Ξ_0 имеет нулевое среднее при $x(t) \equiv x_0$. В соответствии с общим подходом [3], распространенным на функционально-дифференциальные уравнения в [7-9], строится возмущенная функция Ляпунова (теперь это уже функционал !)

$$v(t,\varphi,\mu)=v_0(\varphi(0))+u(t,\varphi,\mu),$$

где $u(t,\varphi,\mu)=-\mu\varphi(0)\varphi(-h)\sin t+\mu C\varphi(0)\cos\frac{t}{\mu}$.

Тогда

$$\dot v|_{(3.1)}=\mu^2\Xi(t,x_t,\mu)=-\mu^2\sin t\left[x^2(t-h)\cos t+x(t)x(t-2h)\cos(t-h)\right]+$$

$$+\mu C\cos\frac{t}{\mu}\left[x(t-h)\cos t+C\sin\frac{t}{\mu}\right].$$

Очевидно, что функционал $\Xi(t,x_t,\mu)$ интегрально непрерывен по μ в нуле и среднее значение $\Xi(t,x_t,\mu)$ при $x(t)\equiv x_0$ совпадает со средним функционала $\Xi(t,x_t,0)$, отличающегося от $\Xi(t,x_t,\mu)$ тем, что у него нет слагаемых с быстро осциллирующими коэффициентами, и равно $-0{,}5x_0^2\sin h$. Нетрудно проверить, что при $\sin h>0$ уравнение (3.1) равномерно асимптотически μ-устойчиво, а при $\sin h<0$ - μ-неустойчиво, так как выполняются все условия соответствующих теорем.

Список использованной литературы

1. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений: Пер. с англ. - М.: Мир, 1964. - 421 с.
2. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. - М.: Наука, 1985. - 224 с.
3. Хапаев М. М. Усреднение в теории устойчивости: Исследование резонансных многочастотных систем. - М., Наука, 1986. - 192 с.
4. Анашкин О. В., Хапаев М. М. Об устойчивости нелинейных систем с малым параметром // Диференц. уравнения. - 1993. - Т. 29, № 8. - С. 1301-1307.
5. Анашкин О. В. О частичной устойчивости динамической системы, интегрально непрерывной по малому параметру // Динамические системы. - К., Либедь. - 1994. - вып. 13. - С. 29-36.
6. Анашкин О. В., Хапаев М. М. О частичной устойчивости нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром // Диференц. уравнения. - 1995. - Т. 31, № 3. - С. 371-381.
7. Анашкин О. В. Достаточные условия устойчивости и неустойчивости для одного класса нелинейных функционально-дифференциальных уравнений // Диференц. уравнения. - 1998. - Т. 34, № 7.
8. Анашкин О. В. Параметрический резонанс в линейной системе с запаздыванием // Известия РАЕН сер. МММИУ. - 1997. - Т.1, № 1. - С. 3-17.
9. Анашкин О. В. Метод усреднения в теории устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Диференц. уравнения. - 1997. - Т. 33, № 4. - С. 448-457.